Prova intermedia di verifica - 2

Unità 3 - Successioni e progressioni geometriche

1 In una progressione geometrica a_n, con $n \geq 1$, è $a_1 = 6$, $q = -\frac{2}{3}$. Determina:

a. il termine generale della progressione;
b. il quinto termine;
c. la somma dei primi cinque termini.

2 Inserisci due medi geometrici tra $a_1 = 1$ e $a_4 = 8$.

3 Paolo, il primo del mese, ha ricevuto in regalo 1000 euro. Ogni giorno successivo spende la metà di ciò che possiede. Dopo quanti giorni gli sarà rimasto meno di 1 euro?

4 Determina x in modo che i tre numeri x, $x-4$ e $x+2$ siano i primi tre termini di una progressione geometrica.

5 Siano $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ e $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ due progressioni geometriche.
a. La successione $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$ è una progressione geometrica?
b. La successione $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots$ è una progressione geometrica?

6 Una sola delle seguenti quattro successioni definite ricorsivamente è una progressione geometrica. Dopo averla individuata, determina il termine generale della progressione e il decimo termine.

a. $\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n \cdot a_{n-1} = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} a_1 = -16 \\ 2a_n = a_{n-1} \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} a_1 = 64 \\ a_n = na_{n-1} \end{cases}$

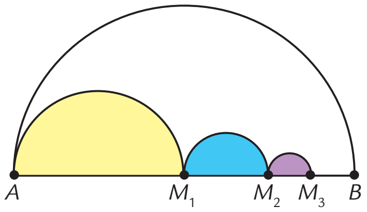
7 Dimostra che in un triangolo rettangolo le misure dell'ipotenusa, di un cateto e della proiezione del cateto considerato sull'ipotenusa sono in progressione *geometrica*.

8 Calcola la somma:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{4}$$

9 In un trapezio isoscele la base minore, il lato obliquo e la base maggiore sono in progressione geometrica. Sapendo che le diagonali del trapezio sono perpendicolari ai lati obliqui e che il perimetro del trapezio è $6(2 + \sqrt{3})$ cm, determina le lunghezze dei lati del trapezio.

10 In riferimento alla figura qui sotto, il segmento AB misura $2r$. Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la successione in cui a_1 è la misura dell'area del semicerchio di diametro AM_1, a_2 è la misura del semicerchio di diametro M_1M_2, ..., a_n è la misura del semicerchio di diametro $M_{n-1}M_n$, e così via, essendo M_1 il punto medio di AB, M_2 il punto medio di M_1B, M_3 il punto medio di M_2B, e così via. Determina il termine generale a_n della successione ed esprimi in funzione di n la somma delle aree dei semicerchi di diametri $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-1}M_n$.



Soluzioni

1 **a.** $a_n = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; **b.** $\frac{32}{27}$; **c.** $\frac{110}{27}$

2 $a_2 = 2, a_3 = 4$

3 Dopo n giorni Paolo avrà ancora $1000\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ euro; Paolo avrà meno di 1 euro dopo 11 giorni.

4 $x = \frac{8}{5}$

5 $a_n + b_n$ in generale non è geometrica. La successione $a_n b_n$ è geometrica e la sua ragione è il prodotto delle ragioni di a_n e di b_n.

6 **b**; il decimo termine è $-\frac{1}{32}$.

7 La tesi segue dal primo teorema di Euclide.

8 $\frac{1}{4}(2^n - 1)$

9 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm, 9 cm

10 $a_n = \frac{\pi r^2}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; $S_n = \frac{\pi r^2}{6}(1 - 4^{-n})$