

Capitolo 3.4

3.4.1 La spiegazione del moto dei pianeti

3.4.2 La legge di gravitazione universale

3.4.3 La determinazione di G

La legge di gravitazione universale

3.4.1 La spiegazione del moto dei pianeti

Copernico, col sistema eliocentrico, e Keplero con l'ipotesi delle orbite ellittiche, erano giunti, per la prima volta nella storia del pensiero, a descrivere in modo soddisfacente il moto dei pianeti. Galileo, con le sue osservazioni e, soprattutto chiarendo le leggi che regolano il moto dei corpi, aveva spazzato via tutte le vecchie obiezioni all'ipotesi eliocentrica. Restava ora aperto il problema di cercare la *causa* del moto dei pianeti. La risposta, è evidente, non poteva essere cercata nella geometria, ma imponeva di fare delle ipotesi o, quanto meno, delle congetture, sulla natura dei corpi celesti: lo spazio che ci separa dai pianeti e dalle stelle è vuoto o pieno? La luce che ci proviene da essi è luce propria o riflessa? Le sfere celesti sono solo una finzione geometrica o sono dei veri e propri oggetti fisici che ruotano intorno al centro dell'Universo? La "virtù" che le tiene in moto proviene dal centro dell'Universo e si propaga verso la sfera delle stelle, o viceversa? E via di questo passo.

È naturale che a domande di questo tipo non si potessero opporre che risposte molto vaghe e fantasiose.

Aristotele, per esempio, immagina un "motore immobile" posto al di là del cielo delle stelle fisse e afferma che la luce proveniente dagli astri è dovuta all'arroventarsi delle sfere celesti in seguito al moto. Keplero capovolge la visione aristotelica e parla di un'"anima motrice" che emana dal Sole e va verso i pianeti e i cui effetti sono tanto più deboli quanto maggiore è la distanza dal Sole.

Cartesio che, come Aristotele, crede all'"orrore del vuoto", riempie il cosmo di materia eterea e immagina che i pianeti ruotando creino dei vortici e che da questi vortici nasca un'attrazione fra un pianeta e l'altro.

Tutte queste congetture non erano, d'altra parte, verificabili in alcun modo ed erano destinate a restare nel campo delle speculazioni metafisiche; in altre parole, non era con questo tipo di indagine, che prendeva le mosse da grandi principi metafisici, come l'"orrore del vuoto" o l'"anima motrice", che l'uomo poteva progredire nella conoscenza del mondo.

Newton, verso la fine del sec. XVII, abbandona questi principi e affronta il problema da un punto di vista del tutto nuovo: ammesso che i corpi celesti si attraggono, egli non cerca di capire *perché* si attraggono, questione sulla quale egli ritiene sia inutile «fingere ipotesi»; egli si pone invece il problema di formulare una legge che dica *come* si attraggono e che sia matematicamente equivalente alle leggi di Keplero. In altre parole, secondo Newton, l'attrazione gravitazionale è una cosa *reale*, nel senso che è misurabile attraverso i suoi effetti e che dalla legge che la descrive possono essere ricavate, come semplici corollari, le leggi del moto dei corpi celesti; essa è la *causa* di tale moto, ma sulla causa di tale causa non possiamo dire nulla, tranne che «essa è nel grembo di Dio» e quindi non rientra nel campo d'indagine della fisica. Con Newton, quindi, vengono fissati i metodi, gli obiettivi ed anche i *limiti* della scienza moderna.

La prima idea della gravitazione venne a Newton durante il soggiorno obbligato in campagna del 1660 a causa della peste e sulla sua scoperta è nato più di un aneddoto.

Ascoltiamo che cosa ci racconta in proposito Eulero nelle sue «Lettere a una principessa tedesca»:

«Questo grande filosofo e matematico inglese si trovava un giorno in un giardino, sdraiato sotto un melo, quando un frutto gli cadde sulla testa, offrendogli l'occasione di fare molte riflessioni. Comprese subito che era stata la pesantezza a far cadere la mela dal ramo, dopo che il vento o qualche altra causa l'aveva staccata. Questa idea sembra del tutto naturale, e qualsiasi contadino avrebbe potuto fare la stessa riflessione. Ma il filosofo inglese non si fermò qui. Pensò subito che l'albero era molto alto; e questa osservazione lo portò a domandarsi ulteriormente se la mela sarebbe caduta se l'albero fosse stato ancora più alto; ed anche di ciò non poteva avere nessun dubbio.

Ma, immaginando che l'albero fosse tanto alto da arrivare fino alla Luna, si trovò incerto sulla risposta da dare. Nel caso, per lui molto probabile, che cadesse (dato che non sarebbe possibile concepire un punto, nell'altezza dell'albero, dove la mela cessasse di cadere), questo frutto dovrebbe necessariamente conservare ancora una certa pesantezza capace di spingerlo verso la Terra. Ma allora anche la Luna, trovandosi in quel luogo, avrebbe dovuto essere sospinta verso la Terra da una forza simile a quella della mela. Ma poiché la Luna non cadeva affatto sulla sua testa, pensò che la ragione di ciò avrebbe potuto essere il movimento di quell'astro, allo stesso modo che una bomba può passare sopra di noi senza cadere giù verticalmente. Questo paragone del movimento della Luna con quello di una bomba, lo spinse a esaminare più attentamente le cose e, aiutato dal soccorso della più sublime geometria, scoprì che la Luna seguiva nel suo movimento le stesse regole che si osservano nel movimento di una bomba; di modo che se fosse possibile gettare una bomba all'altezza della Luna e con la stessa velocità, tale bomba avrebbe un movimento identico a quello della Luna, con la sola differenza che a quell'altezza la pesantezza della bomba sarebbe stata minore che non alla superficie della Terra. (...)

È quindi proprietà importantissima della Terra che tutti i corpi, non soltanto quelli che si trovano sulla sua superficie, ma anche quelli che ne sono molto lontani, almeno fino alla distanza della Luna, siano dotati di una forza, la gravità, che li spinge verso il centro della Terra,

forza che diminuisce via via che i corpi si allontanano dalla sua superficie. E il filosofo inglese non si fermò qui, ma, sapendo che i corpi dei pianeti sono perfettamente simili alla Terra, ne trasse la conclusione che anche i corpi posti nelle loro vicinanze sono pesanti e che la direzione di questa pesantezza tende verso il centro di ciascuno di essi. Tale forza potrà esservi più o meno grande che sulla Terra, tanto che un corpo avente da noi un determinato peso potrà, trasportato alla superficie di un altro pianeta, esservi più o meno pesante. Infine la forza di gravità dei pianeti si estende a grande distanza intorno a loro; e poiché Giove ha quattro satelliti e Saturno cinque, che si muovono intorno ad essi come la Luna si muove intorno alla Terra, nessun dubbio che anche il movimento dei satelliti di Giove e di Saturno sia ritardato dalla pesantezza che essi hanno nei confronti del centro dei rispettivi pianeti.

Ora, allo stesso modo che la Luna si muove intorno alla Terra, e i satelliti di Giove e di Saturno intorno ai rispettivi pianeti, così anche i pianeti si muovono intorno al Sole; e sempre Newton ha tratto la famosa conseguenza che anche il Sole è dotato di questa proprietà, e che tutti i corpi, che si trovano intorno ad esso, sono spinti verso questo astro da una forza che si potrebbe chiamare gravità solare. Tale forza si estende a grande distanza intorno al Sole, ben oltre tutti i pianeti. (...)

Questo stesso scienziato ha poi trovato il modo, con la forza del suo ingegno, di determinare il movimento dei corpi, quando si conosce la forza che li spinge; e poiché aveva già scoperto le forze che muovono tutti i pianeti, si trovò in grado di dare una giusta descrizione del loro movimento. Prima di Newton erano immersi in una profonda ignoranza riguardo ai movimenti dei corpi celesti, e solo a lui siamo debitori delle grandi conoscenze che ora abbiamo nel campo dell'«astronomia».

Riepiloghiamo allora i punti principali del ragionamento di Newton:

- a) La causa che fa cadere la mela dall'albero non viene meno, qualunque sia l'altezza dell'albero; in caso contrario dovremmo concludere che esiste una determinata quota al di sopra della quale i corpi cessano di pesare e di cadere.
- b) Anche la Luna deve allora avere un peso, ossia deve essere attratta dalla Terra, come dimostra il fatto che il suo moto non è rettilineo uniforme; pertanto l'orbita della Luna intorno alla Terra è determinata dalla forza esercitata sulla Luna dalla Terra stessa.
- c) Se estendiamo il ragionamento ai pianeti e al Sole, arriviamo alla conclusione che le orbite dei pianeti, descritte dalle leggi di Keplero sono dovute all'attrazione del Sole sui pianeti stessi.
- d) La legge della gravitazione universale deve essere pertanto ricavabile dalle tre leggi di Keplero e dalle leggi della dinamica, se assumiamo che la legge $F = ma$ non valga solo per i corpi terrestri, ma anche per quelli celesti.

3.4.2 La legge di gravitazione universale

Vediamo ora come Newton, seguendo questo ragionamento, giunge alla legge di gravitazione universale.

Poiché l'eccentricità dei pianeti è molto piccola, Newton, in prima approssimazione, considera *circolare* la loro orbita.

Se applichiamo la seconda legge di Keplero al caso del moto circolare, la velocità risulta costante e pertanto, in questa approssimazione, i pianeti si muovono di *moto circolare uniforme*. Come sappiamo, un corpo che si muove su una circonferenza di raggio R con velocità v è soggetto ad una accelerazione centripeta:

$$a = \omega^2 R = \frac{4 \pi^2}{T^2} R, \quad (1)$$

dove T è il periodo di rotazione. Se allora introduciamo nella (1) i valori di R e di T relativi all'orbita della Luna intorno alla Terra, otteniamo:

$$a = \frac{4 \pi^2 \cdot 3.83 \cdot 10^8 \text{ m}}{(2.36 \cdot 10^6)^2 \text{ s}^2} = 2.71 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad (2)$$

la (2) esprime il valore dell'accelerazione di gravità ad una distanza dalla Terra pari al raggio dell'orbita lunare. Come si vede, tale valore è molto più piccolo di quello misurato sulla superficie della Terra, che è pari, come sappiamo, a 9.8 m/s^2 . Se la forza che vincola la Luna a ruotare intorno alla Terra è della stessa natura di quella che sulla Terra produce la caduta dei gravi, allora *questa forza deve diminuire con la distanza*; quale sarà la legge che lega forza e distanza?

Per rispondere a questa domanda, Newton ricorre alla terza legge di Keplero, secondo la quale il rapporto fra i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti intorno al Sole ed i cubi dei raggi delle orbite, è una costante, che chiamiamo Γ_S :

$$\frac{T^2}{R^3} = \Gamma_S,$$

(ove la piccola esse al piede di gamma ci ricorda che come centro di rotazione stiamo considerando il Sole). La stessa legge vale anche per il moto dei satelliti di Giove, come è stato verificato direttamente (Giove e i suoi satelliti costituiscono una replica, su scala più piccola, del sistema solare); l'unica cosa che cambia è il valore della costante Γ , assai più piccola per Giove che per il Sole. Ammettiamo allora che la terza legge di Keplero valga anche per il moto dei corpi intorno alla Terra; la prova *diretta* di ciò non è possibile, in quanto per verificare la costanza del rapporto T^2/R^3 bisognerebbe ovviamente disporre di almeno due corpi rotanti, con i rispettivi valori di R e di T quando, invece, la Terra ha un solo satellite naturale; tuttavia è lecito supporre che ciò che è valido per il Sole e per Giove sia valido anche per la Terra, almeno fino a prova contraria. Pertanto scriveremo anche per la Luna:

$$\frac{T^2}{R^3} = \Gamma_T,$$

(ove la T al piede di gamma ci ricorda che ora il centro dell'orbita è la Terra), ossia:

$$T^2 = \Gamma_T R^3;$$

se allora sostituiamo nella (1) $\Gamma_T R^3$ al posto di T^2 , otteniamo:

$$a = \frac{4\pi^2 R}{\Gamma_T R^3} = \frac{4\pi^2}{\Gamma_T} \cdot \frac{1}{R^2}, \quad (3)$$

ossia, applicando la legge $F = ma$:

$$F = \frac{4\pi^2}{\Gamma_T} \frac{m}{R^2}, \quad (4)$$

ove m è la massa del corpo orbitante (nel nostro caso la Luna). Supposto per semplicità puntiforme tale corpo e identificando il centro dell'orbita con il centro della Terra, (fig. 1) possiamo allora concludere che la forza di attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro del corpo attrahente (nel nostro caso la Terra).

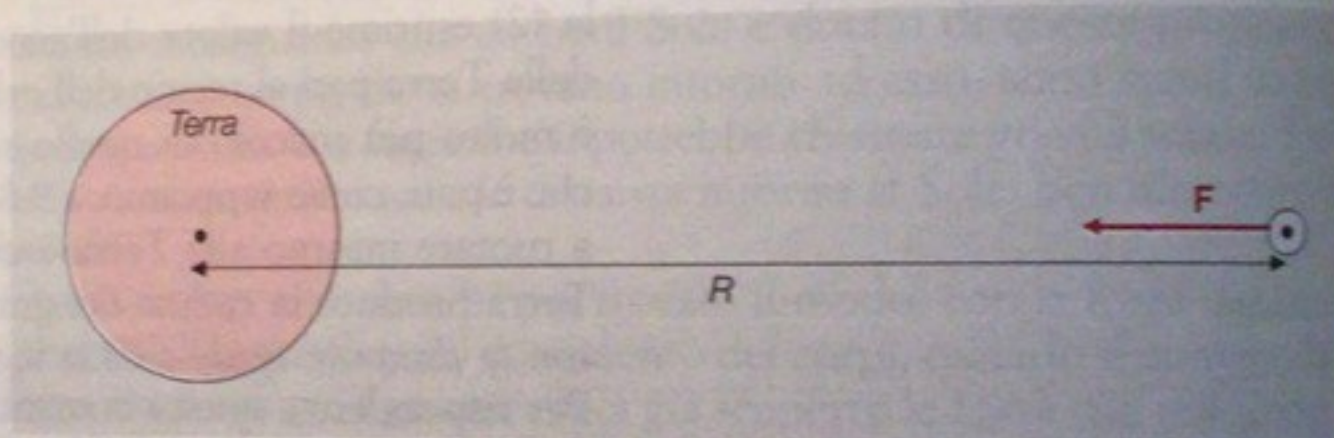


Fig. 1. La forza agente su un corpo rotante intorno alla Terra.

Questa prima importante conclusione può essere facilmente verificata con un semplice calcolo.

Un corpo posto sulla superficie della Terra si trova ad una distanza dal suo centro pari al $6.38 \cdot 10^6$ m, che è 60 volte più piccola della distanza della Luna; in base alla (3), dovrà allora essere sottoposto ad una accelerazione 60^2 volte più grande; e poiché, come abbiamo visto, l'accelerazione della Luna vale $2.71 \cdot 10^{-3}$ m/s², quella del corpo sulla Terra risulta:

$$a = 60^2 \cdot 2.71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 9.76 \text{ m/s}^2,$$

valore che, entro gli errori di arrotondamento, coincide proprio con l'accelerazione di gravità!

D'altra parte, la (4) non può essere valida soltanto per la Terra: a patto di inserire ogni volta il giusto valore di Γ , la (4) dovrà darci la forza di attrazione esercitata dal Sole, da Giove o dalla stessa Luna (poiché anche la Luna attrae gli altri corpi, come dimostra il fenomeno delle maree). In particolare, la forza esercitata dalla Luna sulla Terra, indicata con F_{LT} varrà:

$$F_{LT} = \frac{4\pi^2}{\Gamma_L} \frac{m_T}{R^2}, \quad (5)$$

ove m_T è la massa della Terra, mentre la forza F_{TL} esercitata dalla Terra sulla Luna (che si ottiene dalla (4) mettendo la massa della Luna m_L al posto di m) vale:

$$F_{TL} = \frac{4\pi^2}{\Gamma_T} \frac{m_L}{R^2}. \quad (6)$$

Osserviamo ora che, in base al terzo principio della dinamica (legge di azione e reazione), deve essere:

$$F_{LT} = -F_{TL};$$

(ossia la forza con cui la Luna attrae la Terra deve essere eguale ed opposta a quella con cui la Terra attrae la Luna), da cui, tralasciando il segno meno ed eguagliando la (5) e la (6), otteniamo:

$$\frac{4\pi^2}{\Gamma_L} \frac{m_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{\Gamma_T} \frac{m_L}{R^2},$$

ossia, semplificando:

$$\frac{m_T}{\Gamma_L} = \frac{m_L}{\Gamma_T},$$

che equivale a:

$$m_T \Gamma_T = m_L \Gamma_L.$$

D'altra parte, ripetendo il ragionamento con la coppia Sole-Terra, otterremmo: $m_S \Gamma_S = m_T \Gamma_T$; con la coppia Giove-Sole otterremmo: $m_G \Gamma_G = m_S \Gamma_S$, e così via. In conclusione, *il prodotto $m\Gamma$ è una costante universale; la costante Γ che compare nella terza legge di Keplero risulta quindi inversamente proporzionale alla massa del corpo attrahente.*

Se ora nella (6) moltiplichiamo numeratore e denominatore per m_T , otteniamo:

$$F_{TL} = \frac{4\pi^2}{m_T \Gamma_T} \frac{m_T m_L}{R^2} = \frac{4\pi^2}{m\Gamma} \frac{m_T m_L}{R^2};$$

posto allora:

$$G = \frac{4\pi^2}{m\Gamma}, \quad (7)$$

possiamo scrivere:

$$F_{TL} = G \frac{m_T m_L}{R^2}, \quad (8)$$

(ove, lo ricordiamo, m_T è la massa della Terra, m_L quella della Luna ed R è il raggio dell'orbita lunare, ossia la distanza fra il centro della Luna e il centro della Terra). G prende il nome di *costante di gravitazione universale*. Newton suppone che una espressione analoga possa esprimere la forza di attrazione fra due corpi *qualsiasi*; se, per esempio, al posto di m_L poniamo m_S , ossia la massa del Sole e ad R diamo il valore del raggio (medio) dell'orbita terrestre, otteniamo la forza che il Sole esercita sulla Terra; se, in particolare, al posto di m_L mettiamo la massa m della mela di Newton e ad R diamo il valore del raggio terrestre R_T , otteniamo la forza con cui la Terra attrae la mela, ossia il *peso* della mela:

$$F_P = G \frac{m_T m}{R_T^2}. \quad (9)$$

D'altra parte, sappiamo che il rapporto fra F_p ed m è pari all'accelerazione di gravità; dividendo ambo i membri della (9) per m otteniamo quindi:

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2} \quad (10)$$

La (10) è valida per un generico pianeta e permette di calcolare l'accelerazione di gravità sul pianeta stesso, noti la sua massa e il suo raggio (vedi A4). Viceversa, noto il valore di g , la (10) permette di ricavare la massa del pianeta (vedi A1).

In conclusione, due corpi di massa m_1 ed m_2 posti a distanza r , si attraggono reciprocamente con una forza data da:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (11)$$

Tale legge vale *esattamente* nel caso di:

- due corpi "puntiformi", ossia molto piccoli rispetto alla distanza che li separa;
- due corpi sferici omogenei (o la cui densità dipenda soltanto dalla distanza dal centro);
- un corpo sferico e uno puntiforme.

Nel caso *b)* r rappresenta la distanza fra i centri delle due sfere (fig. 2a); nel caso *c)* r è la distanza fra il corpo puntiforme e il centro della sfera (fig. 2b). La (11) esprime la legge di gravitazione universale.

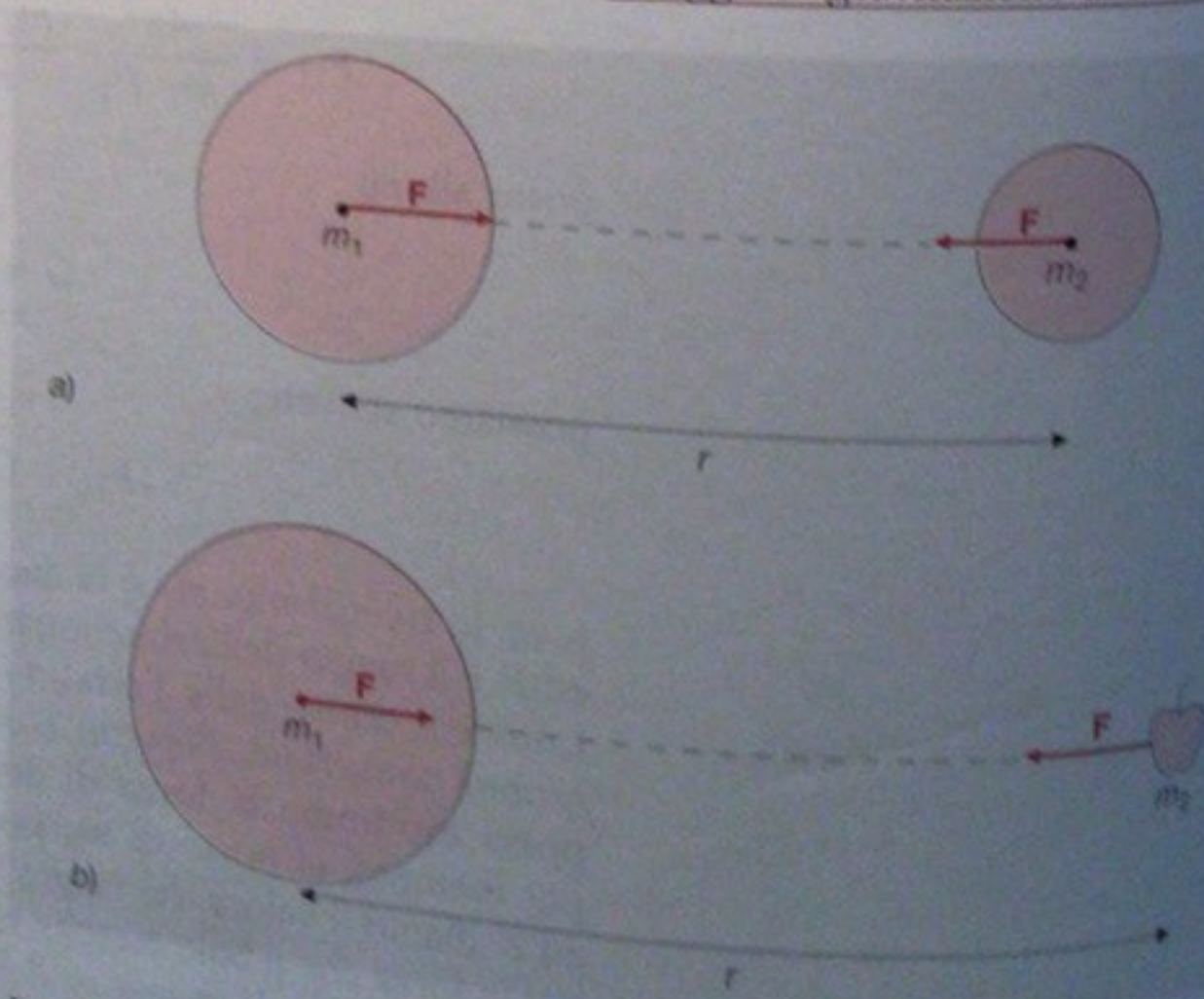


Fig. 2. La legge di gravitazione universale.

3.4.3 La determinazione di G

La (11), tuttavia, non è ancora utilizzabile per la risoluzione di problemi connessi alla gravitazione in quanto non conosciamo il valore di G . Tale costante potrebbe essere ricavata dalla (10) se fosse noto il valore della massa della Terra m_T . Lo stesso Newton seguì questa strada immaginando che la Terra sia una sfera di roccia, con una den-

Fig. 3. L'apparato di Cavendish per la misura della costante di gravitazione universale. Deve essere grande e oro molto sottile (attualmente accuratamente) metodo della torsione manda un sottile schermo a sollecitare uno schermo che deve essere al raddoppio, ecc.