

Con questa scelta, le orbite in un campo gravitazionale possono essere classificate con semplicità. Se l'energia totale di un corpo in orbita è minore di zero, il corpo è legato e l'orbita è un'ellisse. Se l'energia totale è maggiore o uguale a zero, il corpo non è legato e l'orbita è una parabola (nel caso di energia nulla) o un'iperbole (nel caso di energia positiva).

Ripasso

A. *Obiettivi. Dopo aver studiato questo capitolo si dovrebbe:*

1. essere in grado di enunciare le tre leggi empiriche di Keplero sul moto dei pianeti;
2. essere in grado di dedurre la terza legge di Keplero sul moto dei pianeti: il quadrato del periodo è direttamente proporzionale al cubo del raggio per le orbite circolari;
3. essere in grado di definire e confrontare la massa gravitazionale da quella inerziale;
4. conoscere il valore della velocità necessaria per sottrarsi alla gravitazione terrestre;
5. essere in grado di tracciare un grafico dell'energia potenziale gravitazionale in funzione della distanza di separazione e di calcolare la velocità di fuga;
6. essere in grado di descrivere la relazione tra l'energia totale di un corpo in orbita e il tipo di orbita.

B. *Si definisca, si spieghi o si identifichi altrimenti quanto segue:*

- leggi di Keplero, 9.1
 ellisse, 9.1
 costante di gravitazione universale, 9.2
 massa gravitazionale, 9.4
 massa inerziale, 9.4
 principio di equivalenza, 9.4
 velocità di fuga, 9.5

C. *Vero o falso: se l'affermazione è vera, se ne spieghi il perché; se è falsa, si dia un controesempio.*

1. La legge delle aree di Keplero implica che la forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.
2. Il pianeta in media più vicino al Sole ha il più corto periodo di rivoluzione attorno al Sole.
3. La forza che fa cadere una mela ha la stessa origine della forza che fa ruotare la Luna su una circonferenza attorno alla Terra.

Esercizi

Paragrafo 9.1 - Leggi di Keplero

1. La cometa di Halley ha un periodo di circa 76 anni. Qual è la sua distanza media dal Sole? Si dia la risposta in unità astronomiche (UA), dove

$$1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

è la distanza media tra la Terra e il Sole.

2. Supponiamo che venga scoperto un piccolo pianeta con il periodo di 5 anni. Quale sarebbe la sua distanza media dal Sole?

3. La distanza media di Saturno dal Sole è 9,54 UA. Qual è il periodo di Saturno? [Vedi esercizio 1 per la definizione dell'unità astronomica (UA).]

4. La cometa Kohoutek ha un periodo valutato di almeno 10^6 anni. Qual è la sua distanza media dal Sole?

5. Il raggio dell'orbita terrestre è $1,50 \cdot 10^{11}$ m e quello di Urano è $2,87 \cdot 10^{12}$ m. Qual è il periodo di Urano?

6. Marte ha un periodo di 1,88 anni. Qual è la sua distanza media dal Sole?

7. La distanza media di Plutone dal Sole è 39,6 UA. Si trovi il periodo di Plutone. [Vedi esercizio 1 per la definizione dell'unità astronomica (UA).]

Paragrafo 9.2 - Legge di gravitazione universale di Newton

8. Si calcoli la massa della Terra usando i valori noti di G , g e R_T .

9. Un corpo viene lasciato cadere da una quota di 6,37 Mm sopra la superficie della Terra. Quanto vale la sua accelerazione iniziale?

10. A che distanza sopra la superficie della Terra l'accelerazione di gravità vale la metà che al livello del mare?

11. Si trovi la forza gravitazionale che attrae un ragazzo di 65 kg e una ragazza di 50 kg quando sono distanti 0,5 m. (Si supponga che essi siano masse puntiformi.)

12. Una delle lune di Giove, Io, ha il raggio medio dell'orbita pari a 422 Mm e il periodo di $1,53 \cdot 10^5$ s. (a) Si trovi il raggio medio dell'orbita di un'altra luna di Giove, Callisto, il cui periodo è $1,44 \cdot 10^6$ s. (b) Si usi il valore noto di G per calcolare la massa di Giove.

13. Urano ha una luna, Umbriel, la cui orbita ha un raggio medio di 267 Mm e il cui periodo è $3,58 \cdot 10^5$ s. (a) Si trovi la massa di Urano. (b) Si trovi il periodo di un'altra luna, Oberon, la cui orbita ha il raggio medio di 586 Mm.

14. La massa di Saturno è $5,69 \cdot 10^{28}$ kg. Si trovi il periodo della sua luna Mimas, la cui orbita ha il raggio medio di 186 Mm. (b) Si trovi il raggio medio dell'orbita della sua luna Titano, il cui periodo è $1,38 \cdot 10^8$ s.

15. Si trovi il raggio dell'orbita circolare di un satellite che ruota attorno alla Terra con il periodo di 1 giorno. [Se tale satellite è sopra l'equatore e ruota nello stesso verso della Terra, esso appare stazionario rispetto alla Terra (geostazionario).]

16. Supponete di atterrare su un pianeta di un altro sistema solare che ha la stessa densità della Terra, ma ha il raggio dieci volte maggiore. Quale sarebbe il vostro peso in confronto a quello sulla Terra?

Paragrafo 9.3 - L'esperimento di Cavendish

17. Si calcoli la massa della Terra in base ai valori del periodo della Luna (27,3 giorni) e del raggio medio dell'orbita della Luna (0,384 Gm), e al valore noto di G .

18. Le masse in un apparecchio di Cavendish sono $m_1 = 12$ kg e $m_2 = 15$ g, e la distanza tra i loro centri è 5 cm. (a) Qual è la forza di attrazione tra queste due masse?

(b) Se l'asta che separa le due masse piccole è lunga 18 cm, che momento di forza dev'essere esercitato dalla sospensione per equilibrare il momento esercitato dalla forza gravitazionale?

Paragrafo 9.4 - Massa gravitazionale e massa inerziale

Non ci sono esercizi per questo paragrafo.

Paragrafo 9.5 - Come sottrarsi all'attrazione terrestre

19. Il pianeta Saturno ha la massa 95,2 volte quella della Terra e il raggio 9,47 volte quello della Terra. Si trovi la velocità di fuga per corpi situati in prossimità della superficie di Saturno.

20. Si trovi la velocità di fuga per un razzo che parta dalla Luna. L'accelerazione di gravità sulla Luna è 0,166 volte quella sulla Terra, e il raggio della Luna è $0,273 R_T$.

Paragrafo 9.6 - Energia potenziale, energia totale e orbite

21. (a) Si trovi l'energia potenziale (avendola posta pari a zero all'infinito) di una massa di 100 kg sulla superficie della Terra. (Si prenda 6,37 Mm per il raggio della Terra.) (b) Si trovi l'energia potenziale della stessa massa quando è posta a una quota, sopra la superficie della Terra, pari a un raggio terrestre. Quale sarebbe la velocità di fuga per un corpo lanciato da questa quota?

Problemi

1. La Terra gira attorno al Sole su un'orbita quasi circolare di raggio $1,50 \cdot 10^{11}$ m. Il suo periodo è 1 anno. Si usino questi dati per calcolare la massa del Sole.

2. Una particella viene lanciata dalla superficie della Terra con una velocità pari al doppio della velocità di fuga. Qual è la sua velocità quando essa è molto lontana dalla Terra?

3. Si deve lanciare dalla Terra una sonda spaziale in modo che abbia la velocità di 50 km/s quando è molto lontana dalla Terra. Che velocità deve avere la sonda sulla superficie della Terra?

4. Si dimostri che l'equazione 9.19 può essere scritta nella forma

$$U = mgR_T \left(1 - \frac{R_T}{r} \right)$$

dove g è l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra.

5. Un oggetto inizialmente fermo viene lasciato cadere da una quota $4 \cdot 10^6$ m sopra la superficie della Terra. Se non ci fosse la resistenza dell'aria, quale sarebbe la sua velocità nel momento in cui colpisce la Terra?

6. Due pianeti di masse uguali sono in orbita attorno a una stella di massa molto maggiore (vedi figura 9.9). Il pianeta m_1 si muove su un'orbita circolare avente il raggio di 100 Gm con un periodo di 2 anni. Il pianeta m_2 si muove

su un'orbita ellittica con il perielio alla distanza $r_1 = 100$ Gm e l'afelio alla distanza $r_2 = 180$ Gm, com'è mostrato nella figura. (a) Tenendo conto del fatto che il raggio medio di un'orbita ellittica è la lunghezza del semiasse maggiore, si trovi il periodo dell'orbita di m_2 . (b) Qual è la massa della stella? (c) Quale dei due pianeti ha la velocità maggiore nel punto P ? Quale dei due ha l'energia totale maggiore? (d) Si confronti la velocità di m_2 nel punto P con quella nel punto A .

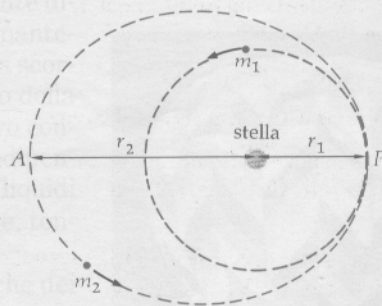


Figura 9.9. Problema 6.

7. (a) Si calcoli l'energia (in joule) necessaria per allontanare una massa di 1 kg dalla Terra con la velocità di fuga. (b) Si converta questa energia in kilowattora. (c) Se si può produrre energia al costo di 100 lire/kilowattora, qual è il costo minimo necessario per mandare un astronauta di 80 kg fuori dal campo gravitazionale della Terra?

8. Si dimostri che l'energia potenziale di una particella di massa m posta a una quota h sopra la superficie della Terra si può scrivere nella forma

$$U = mgR_T [1 - (1 + h/R_T)^{-1}]$$

Se x è molto minore di 1, si può usare l'approssimazione $(1+x)^{-1} \approx 1-x$. Si usi questa espressione con $x=h/R_T$ per dimostrare che, se h è molto minore del raggio della Terra, l'energia potenziale gravitazionale è data da

$$U = mgR_T [1 - (1 + h/R_T)^{-1}] \approx mgh$$

