

LAVORO DI MATEMATICA

Un esercizio della verifica consisterà nella ricerca di una funzione interpolatrice di dati, e del relativo indice di determinazione (R^2) per capire quanto essi siano correlati e, nel caso, se si possa individuare una relazione funzionale fra essi.

Abbiamo visto come trovare la retta interpolatrice di una distribuzione di punti (retta di regressione o dei minimi quadrati) e quali calcoli si debbano fare per trovare R^2 (cercare la pendenza m della retta che interpola y su x e poi la pendenza m' della retta che interpola y su x : il prodotto mm' è il coefficiente di determinazione R^2 e maggiore è la sua prossimità a 1, maggiore è la correlazione fra i dati).

Possiamo però provare a valutare se vi sia una curva interpolante di altro genere più accurata della retta. Dopo aver dato una rappresentazione grafica delle coppie di valori, possiamo fare l'ipotesi di una dipendenza di tipo esponenziale, in tal caso dovremo interpolare linearmente le variabili x e $\log(y)$, oppure una funzione di tipo polinomiale, per la quale sarà utile provare a interpolare linearmente le variabili $\log(x)$ e $\log(y)$.

Tutto questo sarebbe abbastanza facile potendo usare un foglio elettronico. Potendo invece utilizzare solo una calcolatrice, il rischio di commettere errori cresce. Ecco qualche consiglio:

- non trascurate la rappresentazione dei punti, vi può essere di aiuto nel caso di errori; se ad esempio vi viene un coefficiente m negativo e i punti sono disposti in modo "crescente" evidentemente qualcosa non torna.
- evitate di scrivere i valori come numeri decimali: se il numero che dovete trattare è $\log(3)$ digitate sulla vostra calcolatrice $\log(3)$ e non 0,4771212547.... capite che commettere errori con tutte quelle cifre decimali è inevitabile, oltre al fatto che $\log(3)$ è il valore più preciso che la macchinetta ci può restituire.
- preparatevi una tabella con tutto quello che vi serve: $\sum x_i^2$, \bar{x} ecc... in modo che poi dobbiate solo inserirli nei vostri calcoli.
- certamente avete buttato via il manuale d'uso della vostra calcolatrice (sciagurati!), ma potete andare su internet a scaricarlo, per cercare se la vostra macchinetta sa calcolare la media o altre funzioni utili. Dovete anche sapere che la macchinetta probabilmente ha delle celle di memoria in cui potete infilare i vostri dati e riprenderli al momento opportuno.

Vi do qualche esercizio di allenamento, ma potete inventarveli voi stessi, generando dei dati e poi analizzandoli per cercare una eventuale correlazione di qualche genere.

1. Una distribuzione di dati è rappresentata nella seguente tabella:

X	0,5	1	1,5	0
Y	1,6	2	2,5	3,5

- (a) rappresenta questi dati in un riferimento cartesiano;
 - (b) cerca la retta che interpola i dati, e calcola il coefficiente di determinazione;
 - (c) prova a vedere se ai dati si può applicare un modello di tipo esponenziale: quale sarebbe l'equazione in tal caso?
 - (d) prova a vedere se ai dati si può applicare un modello di tipo polinomiale quale sarebbe l'equazione in tal caso?
 - (e) quale fra i tre modelli trovati fornisce un indice di determinazione più prossimo a 1?
2. Anni fa ai ragazzi di una classe prima ho fatto misurare la lunghezza di una molla appoggiata su un piano inclinato senza attrito al variare del dislivello del piano. Si partiva con il piano orizzontale, quindi la prima misura della lunghezza della molla era la lunghezza a riposo; successivamente si innalzava il piano aggiungendo di volta in volta uno spessore di 2,5cm e si misurava la lunghezza della molla. I dati acquisiti erano i seguenti:

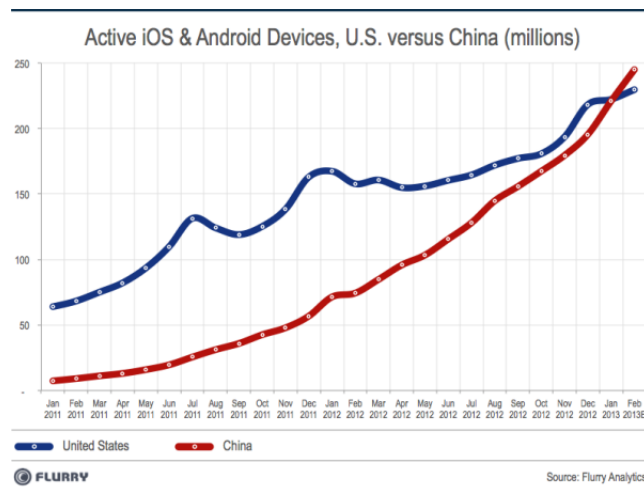
ESPERIMENTO ALLUNGAMENTO MOLLA SUL PIANO INCLINATO	
innalzamento piano inclinato (cm)	lunghezza molla (cm)
0	34,8
2,5	35,7
5	36,6
7,5	37,4
10	38,3
12,5	39,3
15	40,1
17,5	41
20	41,8
22,5	42,7

Utilizzando il foglio elettronico, interpola queste misure e verifica se i dati individuano una dipendenza di tipo lineare. Teoricamente il modello è accettabile? Visto che usi il foglio elettronico, puoi facilmente interpolare x con $\log(y)$ e infine $\log(x)$ con $\log(y)$: dal punto di vista del coefficiente di determinazione migliora qualcosa?

3. Ed ecco i dati dell'oscillazione di un pendolo, rilevati in una classe prima di qualche anno fa. Tralasciamo le incertezze e analizziamo i dati: che legge verrebbe fuori da questi?

l (cm)	inc. l	T (s)	inc. T
20	1	0,88	0,03
40	1	1,26	0,03
60	1	1,54	0,03
80	1	1,76	0,03
100	1	1,94	0,03
120	1	2,16	0,03
140	1	2,32	0,03
160	1	2,48	0,03
180	1	2,68	0,03

4. Sulla pagina web di Ict Business del 24 febbraio 2013 si legge: *Entro la fine di febbraio la Cina dovrebbe diventare il primo mercato mondiale di smartphone e tablet, superando gli Stati Uniti. Oltre la Grande muraglia saranno venduti entro fine mese 246 milioni di dispositivi Android e iOS. A gennaio il sorpasso era già parso imminente, visto che il dato relativo a Stati Uniti e Cina era praticamente paritario, con 222 milioni di dispositivi per gli Stati Uniti e 221 milioni per la Cina. A febbraio avverrà il sorpasso: negli Stati Uniti saranno consegnati in totale "solo" 230 milioni di smartphone. Il mercato a stelle e strisce ha vissuto alti e bassi nel corso degli ultimi due anni, mentre la Cina ha continuato a registrare una crescita esponenziale a partire dal gennaio 2011.*



- (a) nel grafico rappresentato sopra i dati relativi alla Cina sono quelli rappresentati dalla curva più bassa. Scrivi una tabella rappresentativa dei numeri di apparecchi venduti in Cina nel tempo (numeri vendite in milioni, tempo in mesi). Rappresenta solo i dati facilmente leggibili dal grafico.
- (b) verifica se il modello è esponenziale mediante la trasformazione $\begin{cases} t' = t \\ n' = \log n \end{cases}$, valutando se si ottengono o meno valori allineati.
- (c) nel caso che il modello sia esponenziale, trovarne un'equazione matematica.
- (d) immaginando che l'andamento delle vendite continui a seguire il modello trovato, valutare quante saranno le vendite di dispositivi Android e iOS nel giugno 2013.
5. Otto alpinisti si legano in cordata per attraversare un ghiacciaio. Due di loro però sono principianti, per cui si vuole che non siano né al primo né all'ultimo posto. In quanti modi diversi può essere formata la cordata degli otto alpinisti?
6. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.
7. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quello che occupa la 1441-esima posizione?

8. Dimostra che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

9. Risolvi le seguenti equazioni:

(a) $3 \cdot \binom{n}{3} = n \cdot \binom{n-1}{2}$

(b) $\binom{n+2}{3} - \binom{n+2}{n-1} = 2 \cdot \binom{n+2}{4}$