LAVORO DI MATEMATICA

Qua sotto scrivo alcuni appunti sull'interpolazione di Lagrange. Se preferisci, puoi vedere il video https://www.youtube.com/watch?v

Siano dati $n+1$ punti del piano cartesiano $P_1.....P_{n+1}$ aventi le ascisse a due a due distinte. Esiste una funzione polinomiale f di grado n (una funzione polinomiale è una funzione ottenuta uguagliando a 0 un polinomio) al cui grafico appartengano tutti i punti $P_1.....P_{n+1}$.

Inoltre tale funzione è unica.

La dimostrazione di questa affermazione è costruttiva, cioè si basa sulla costruzione effettiva della funzione polinomiale con le caratteristiche richieste.

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, ...,$P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ i punti da interpolare mediante una funzione polinomiale.

Costruiamo anzitutto il polinomio L_1 nel modo seguente:

$$L_1 = \frac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)\dots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})}$$

A numeratore mettiamo il prodotto dei fattori $(x-x_i)$ dove le x_i sono le ascisse dei punti P_i , con $i \neq 1$. A denominatore abbiamo il prodotto delle differenze fra x_1e ciascuna delle x_i, ad eccezione di $x = x_1$. Osserviamo che questa funzione si annulla se si sostituisce al valore di x una qualsiasi delle ascisse x_i, con $i \neq 1$, mentre assume il valore 1 per $x = x_1$.

In modo analogo possiamo costruire il polinomio L_2 avente come numeratore il prodotto dei fattori $(x - x_i)$ dove le x_i sono le ascisse dei punti P_i , con $i \neq 2$ e come denominatore il prodotto delle differenze fra x_1e ciascuna delle x_i, ad eccezione di $x = x_2$:

$$L_1 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)\dots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)\cdot(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})}$$

Anche per questa funzione osserviamo che si annulla per le x_i di tutti i punti diversi da P_2, mentre assume il valore 1 se $x = x_2$.

In modo analogo possiamo costruire le funzioni $L_3....L_{n+1}$che si annullano per n valori di x_i e assumono valore 1 per la rimanente ascissa.

Esercizio:

1. Dati i punti $P_1 = (-3, 1)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (5, 6)$ costruisci le funzioni L_1,L_2, L_3 e L_4.
   (il risultato dei primi due polinomi dovrebbe essere $L_1 = \frac{10-17x+8x^2-x^3}{160}$, $L_2 = \frac{x^3-4x^2-11x+30}{16}$...)

Una volta costruiti i polinomi $L_1, ..., L_{n+1}$il polinomio che interpola i punti $P_1, ..., P_n$si costruisce facendo una combinazione lineare degli L_i prendendo come coefficiente del termine L_i l'ordinata y_i del punto P_i:

$$f(x_k) = y_1L_1(x_k) + y_2L_2(x_k) + ... + y_{n+1}L_{n+1}(x_k)$$

Fra gli $n + 1$ addendi n si annullano (tutti quelli che hanno indice diverso da k); l'addendo con indice k è tale che $L_k(x_k) = 1$, per cui $f(x_k) = y_k$.

Il metodo appena illustrato è chiamato metodo di Lagrange.

Esercizi

1. Trova con il metodo di Lagrange il polinomio che interpola i punti $A = (-3, -2)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 3)$. Trovi più comodo questo metodo o il classico metodo della parabola per tre punti con il sistemone?
2. Dati i punti $A = (-2, 1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (2, 1)$ e $D = (4, -1)$,
   (a) trova la funzione polinomiale interpolante f;
   (b) calcola $f(6)$.
3. E' data la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
   (a) calcola $f(1)$;
   Sia h una quantità positiva che può assumere un valore anche molto piccolo (cioè molto prossimo a 0):
   (b) calcola $f(1 + h)$;
   (c) calcola $f(1 + h) - f(1)$;
   (d) calcola $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$: a che valore tende questo rapporto quando h tende a 0?