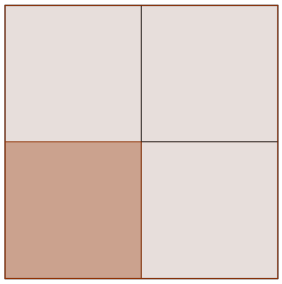
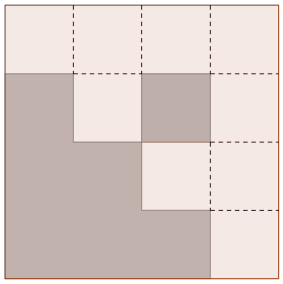
LAVORO DI MATEMATICA

1. E' dato un quadrato di lato 2 che viene colorato utilizzando la seguente procedura: si divide il quadrato in quattro quadrati uguali e si colora la parte in basso a sinistra, come indicato nella figura qui sotto:



successivamente si divide ogni quadrato non ancora colorato in quattro quadrati uguali e si colora il quadrato in basso a sinistra, come mostrato nella figura seguente:



Si procede in questo modo, dividendo l'area non ancora colorata in quadrati uguali e colorando sempre il quadrato in basso a sinistra; si definisce A_n l'area complessiva colorata dopo n passi

(a) mostra che vale la relazione ricorsiva:

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + 1 \end{cases}$$

(b) sia $B_n = A_n - 4$: mostra che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $B_{n+1} = \frac{3}{4}B_n$. Che tipo di successione è B_n?

(c) utilizza quanto osservato relativamente alla successione B_n per trovare il termine generale della successione A_n.

(d) calcola $\lim_{n\to\infty} A_n$, dando una dimostrazione analitica della risposta e dando anche un'interpretazione a partire dalla costruzione geometrica della successione.