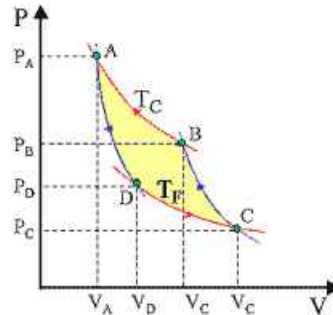


LAVORO DI FISICA

- Una macchina di Carnot consta di quattro trasformazioni: un'espansione isoterma AB , un'espansione adiabatica BC , una compressione isoterma CD e una compressione adiabatica DA .



Le trasformazioni isoterme avvengono alle temperature T_C (temperatura calda, quella della trasformazione AB) e T_F (temperatura fredda, quella della trasformazione CD).

Vogliamo calcolare il rendimento della macchina di Carnot, ricordando che il rendimento è dato dal rapporto fra il lavoro utile compiuto dalla macchina (quello rappresentato con il colore giallo nella figura) e il calore immesso nella macchina (non quello che esce dalla macchina, nella fase di raffreddamento).

Iniziamo a calcolare il lavoro effettivo compiuto dalla macchina in un ciclo. Supponiamo vi siano n moli di fluido termodinamico e che il fluido sia un gas sia monoatomico (vedremo che questo non influisce sulle considerazioni che stiamo per fare).

- Lavoro sull'isoterma AB : $L_{AB} = nrT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$. Nell'isoterma non vi è variazione di energia interna, quindi questo lavoro è fatto completamente a spese del calore immesso, che è quindi $Q_{AB} = L_{AB} = nrT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ (è il calore che sta a denominatore nel calcolo del rendimento).
- Lavoro sull'adiabatica BC : in questa trasformazione il volume aumenta, quindi il fluido termodinamico compie lavoro, ma a spese dell'energia interna (in questa fase nella macchina non entra e non esce calore) $L_{BC} = \Delta U = \frac{3}{2}nR(T_F - T_C)$
- Lavoro sull'isoterma CD : $L_{CD} = nrT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$. È un lavoro in cui il volume diminuisce, quindi un lavoro negativo (osserviamo che $V_D < V_C$ quindi $\frac{V_D}{V_C} < 1$ e il logaritmo è un numero negativo).
 $Q_{CD} = L_{CD} = nrT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$: è il calore che esce dalla macchina ad ogni ciclo.
- Lavoro sull'adiabatica DA : in questa trasformazione il volume diminuisce, quindi il fluido termodinamico compie lavoro negativo, e l'energia interna aumenta $L_{DA} = \Delta U = \frac{3}{2}nR(T_C - T_F)$
- Il lavoro complessivo della macchina è dato dalla somma dei quattro termini che abbiamo appena trovato. Osserviamo che i lavori compiuti nelle due adiabatiche sono uno l'opposto dell'altro (e questo sarebbe vero anche nel caso di gas poliatomici), per cui due termini si cancellano. Rimane $L = L_{AB} + L_{CD} = nrT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nrT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$
- Se ne deduce che il rendimento è:

$$\eta = \frac{\text{lavoro effettivo}}{\text{calore immesso}} = \frac{nrT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nrT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nrT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{T_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

- Questa espressione per il rendimento può essere ulteriormente semplificata, considerando la relazione che lega volume e temperatura in una adiabatica: $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$. Possiamo quindi scrivere:

$$T_C V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1}$$

$$T_C V_A^{\gamma-1} = T_F V_D^{\gamma-1}$$

e dividere queste due equazioni membro a membro, trovando che:

$$\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} = \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}}$$

Se ne deduce che:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

e che quindi $\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$.

- Otteniamo, quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_F \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{T_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

e arriviamo alla conclusione che il rendimento della macchina di Carnot dipende solo dalle temperature fra cui la macchina lavora e non da altro:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$