Parte B

OBIETTIVI

Obiettivo della parte B è la sistemazione razionale di fatti geometrici relativi allo spazio ordinario; a questo scopo è importante avere familiarità con le nozioni di assioma, definizione, teorema; nozioni che peraltro dovrebbero già essere note.
Obiettivo specifico di questo capitolo:
conoscere e sapere formulare gli assiomi, le definizioni, gli enunciati dei teoremi e alcune dimostrazioni riguardanti

- relazioni di appartenenza fra punti e rette, punti e piani, rette e piani
- piani incidenti e piani paralleli
- esistenza di piani paralleli fra loro
- rette incidenti, parallele, sghembe
- relazioni di equivalenza - giacitura di piani - direzione di rette

1B.1 Sistemazione assiomatica

Quanto è stato detto nella parte precedente può essere sistemato in modo *rigoroso*, ossia organizzato in una trattazione teorica *ipotetico-deduttiva*.
Come è stato nel caso della geometria del piano, partiremo accettando alcuni principi, **assiomi**, che stabiliscono le proprietà degli elementi base dello spazio (**punti, rette, piani**). Come sempre si tratta di proprietà intuitivamente accettabili; vedremo, infatti, che i primi tre assiomi sono proprio le prime tre proprietà emerse nell'attività preparatoria.
Degli elementi base non daremo definizioni esplicite, ma il loro *comportamento* sarà determinato dagli assiomi scelti.
Si dedurranno poi nuove proprietà: le proprietà con le loro dimostrazioni sono dette **teoremi**.
A partire dagli assiomi base e dai teoremi introdurremo, tramite definizioni, altri enti.
Il sistema di assiomi che è stato scelto è sovrabbondante, ossia, alcune proprietà poste come assiomi potrebbero essere dimostrate a partire dalle altre; questa scelta è stata dettata dal desiderio di disporre di una base abbastanza potente in modo da arrivare presto a proprietà significative.

1B.2 I primi assiomi

ASSIOMA A1 **Dati due punti distinti esiste una e una sola retta che li contiene. Ogni retta contiene almeno due punti.**

La retta $\boldsymbol{r}$ che congiunge i due punti P e Q sarà detta anche retta PQ.
Una conseguenza immediata è che due rette distinte hanno al più un punto in comune: in tal caso si dicono **incidenti.**

Fig. 17

ASSIOMA A2 **Dati tre punti non allineati esiste uno e un sol piano che li contiene. Ogni piano contiene almeno tre punti non allineati.**

Il piano α individuato da tre punti A, B, C è detto anche piano ABC, o piano congiungente A, B, C.

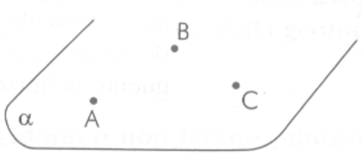

Fig. 18

ASSIOMA A3 **Se una retta ha due punti in comune con un piano giace tutta su questo piano**

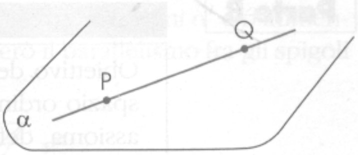

Fig. 19

Vediamo subito qualche semplice conseguenza di questi primi assiomi; in particolare troviamo qualche altro modo per individuare un piano.

TEOREMA 1 **Esiste ed è unico il piano che contiene una retta *r* e un punto *P* esterno ad essa**

Basta prendere *A* e *B* su ***r*** (**A1**) e considerare il piano *ABP* (**A2**). Il piano contiene la retta ***r***, (**A3**). Lo diremo piano congiungente ***r*** e *P* o soltanto piano ***r*** *P*.

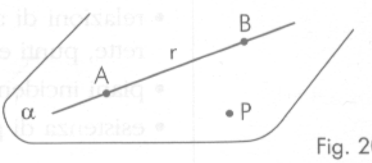

Fig. 20

TEOREMA 2 **Se due rette *r* e *s* sono incidenti esiste ed è unico il piano che le contiene (lo chiameremo piano *rs*).**

Il ragionamento che giustifica questo fatto è conseguenza degli assiomi **A1** e **A2** ed è già stato esposto alla fine del paragrafo **1A.4**.

Ricordiamo che la locuzione **'esiste ed è unico'** nel linguaggio matematico è equivalente a **'è individuato'**, perciò gli enunciati dei teoremi 1 e 2 possono essere espressi anche nella forma:

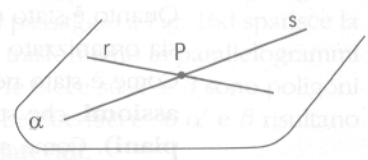

Fig. 21

Una retta *r* e un punto *P* esterno alla retta individuano un piano
Due rette incidenti individuano un piano che le contiene

Da **A2** sappiamo che, se ***r*** è una retta del piano α, esistono punti di α fuori di ***r*** (ossia la retta non esaurisce tutto il piano); ma resta da stabilire che nessun piano esaurisce tutto lo spazio e per questo poniamo il seguente assioma.

ASSIOMA A4 **Esistono almeno quattro punti non complanari**

Siano *A*, *B*, *C*, *D* i quattro punti la cui esistenza è affermata dall'assioma, allora, certamente, esiste per ogni tre di essi il piano che li contiene e lascia fuori il quarto punto, ossia esistono piani nello spazio, inoltre dato un piano esiste almeno un punto che non appartiene ad esso.

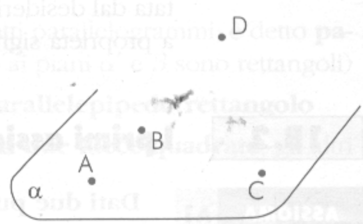

Fig. 22

Passiamo ora a considerare due piani che abbiano almeno un punto in comune, la relazione che tra loro intercorre è stabilita dal seguente

ASSIOMA A5 **Se due piani distinti hanno un punto *P* in comune, allora hanno in comune tutta una retta *r*, passante per *P* (i piani si dicono incidenti).**

Dunque due piani α e β o sono **coincidenti**, o non hanno punti in comune o sono **incidenti** (in tal caso hanno tutta una retta in comune).

Analogamente a quanto è stato detto per le rette del piano, per i piani nello spazio diamo la seguente definizione:

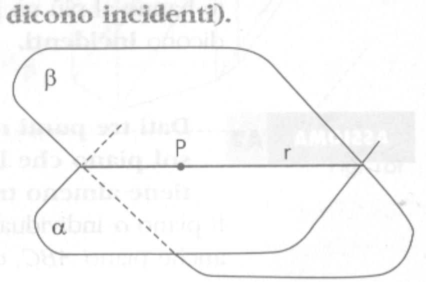

Fig. 23

Due piani si dicono paralleli se coincidono oppure se non hanno alcun punto in comune

Poniamo a base delle proprietà del parallelismo fra piani l'assioma seguente:

ASSIOMA A6 **Dato un piano α e un punto P fuori di esso esiste ed è unico il piano parallelo ad α e contenente P**

La relazione di parallelismo fra piani è chiaramente una relazione di equivalenza.

Ricordiamo che una relazione data su un insieme I si dice **di equivalenza** se gode delle seguenti proprietà:

- **riflessiva:** ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso
- **simmetrica:** per ogni x e y dell'insieme se x è in relazione con y, anche y è in relazione con x
- **transitiva:** per ogni x, y e z dell'insieme se x è in relazione con y e y è in relazione con z, anche x è in relazione con z.

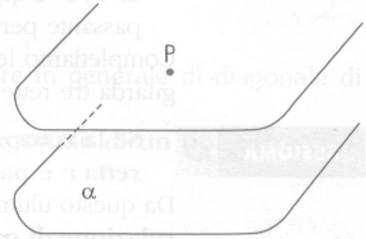

Fig. 24

Ricordiamo ancora che se ripartiamo gli elementi di un insieme I in tanti sottoinsiemi, detti classi di equivalenza, che contengano tutti gli elementi fra loro equivalenti, si dice che in I si è operata una **partizione** e il nuovo insieme formato dalle classi di equivalenza si dice insieme **quoziente** di I rispetto alla relazione data.

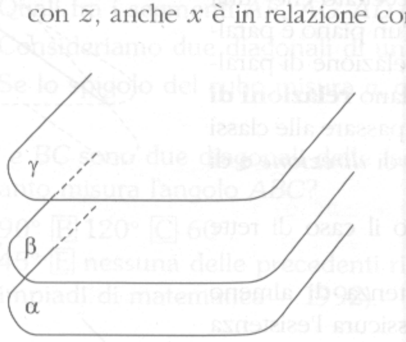

Fig. 25

Nel caso del parallelismo fra piani le proprietà *riflessiva* e *simmetrica* derivano immediatamente dalla definizione, mentre nella proprietà *transitiva* gioca anche l'assioma precedente; infatti, siano α, β, γ tre piani con α parallelo a β e β parallelo a γ, possiamo riconoscere che α è parallelo a γ. Se α e γ coincidono la proprietà è già verificata, se α e γ non coincidono non possono avere punti in comune: se esistesse un punto P (anzi tutta una retta), comune ad α e a γ, per questo punto passerebbero due piani distinti paralleli a β, contro **A6**.

Possiamo allora suddividere l'insieme dei piani dello spazio secondo classi di equivalenza che si dicono **giaciture**: si dirà che due o più piani paralleli hanno la stessa giacitura.

Abbiamo già visto nello spazio coppie di rette incidenti la cui esistenza deriva dall'assioma **A2** e abbiamo anche riconosciuto che due rette incidenti appartengono ad uno stesso piano, ossia sono complanari.

Consideriamo ora due rette nello spazio che non siano incidenti.

Se le due rette appartengono ad uno stesso piano e non sono incidenti sembra ragionevole considerarle parallele, nel senso che già conosciamo dalla geometria piana.

In effetti, in generale, per le figure dello spazio che appartengono ad un piano ci aspettiamo che valgano tutte le proprietà già note dalla *Geometria del piano*, pertanto **assumiamo che su ogni piano valgano assiomi, definizioni e teoremi della geometria del piano**.

Per il parallelismo fra rette si ha la definizione che segue.

due rette complanari si dicono parallele se coincidono o non hanno punti in comune

Conveniamo che

- **data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, esiste una e una sola retta passante per *P* e parallela ad *r***, infatti una parallela a ***r*** passante per *P* deve appartenere al piano individuato da ***r*** e da *P*, e su questo piano la parallela ad ***r*** passante per *P* esiste ed è unica.

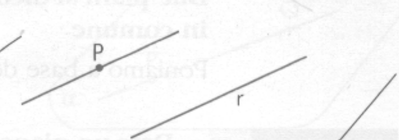

Fig. 26

Completiamo le proprietà del parallelismo fra rette con l'assioma che segue, e che riguarda tre rette, questa volta non tutte complanari.

ASSIOMA A7 **Se la retta *r* è parallela alla retta *s* e la retta *s* è parallela alla retta *t*, allora la retta *r* è parallela alla retta *t*.**

Da questo ultimo assioma risulta chiaramente che **la relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza**; le rette dello spazio vengono allora suddivise secondo classi di equivalenza, che si diranno **direzioni**.

È interessante notare che l'avere accettato che "una retta è parallela a se stessa", e che "un piano è parallelo a se stesso" ha fatto sì che la relazione di parallelismo fra rette e quella fra piani siano **relazioni di equivalenza**. È stato così possibile passare alle classi di equivalenza e definire i concetti di *direzione* e di *giacitura*.

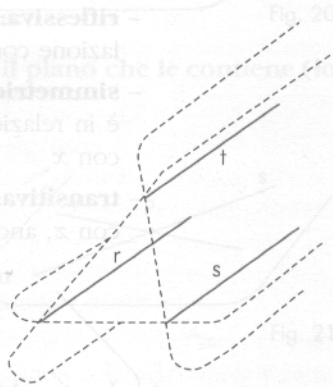

Fig. 27

Passiamo ora ad analizzare meglio il caso di rette non incidenti e non complanari.

L'assioma **A4**, che afferma l'esistenza di almeno quattro punti non complanari, ci assicura l'esistenza di coppie di rette siffatte: se *D* è il punto esterno al piano dei tre punti *A*, *B* e *C*, le rette *AB* e *CD* non hanno punti in comune e non appartengono allo stesso piano.

Tali rette non hanno, è vero, punti in comune, ma non sembra neppure che abbiano la stessa direzione, sarebbe perciò improprio chiamarle parallele. Daremo allora una nuova definizione.

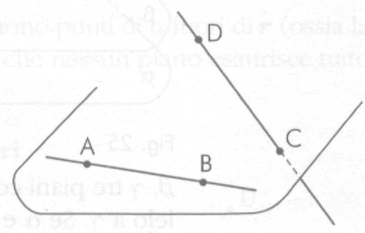

Fig. 28

Due rette non complanari si dicono sghembe.

Viene ora spontaneo definire una terza relazione di parallelismo, partendo dalla definizione seguente:

Una retta e un piano si dicono paralleli se la retta è contenuta nel piano o se retta e piano non hanno punti a comune

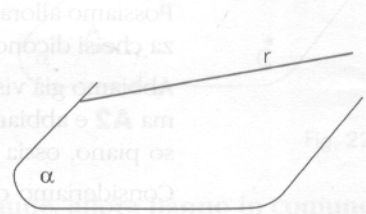

Fig. 29

Tutte le rette di un piano sono parallele al piano stesso, ma è facile anche costruire una retta parallela ad un piano che sia esterna a questo: basta condurre per un punto *P* fuori da un piano α (**A4**) il piano β parallelo ad α (**A6**). Ogni retta di β è parallela ad α, in particolare tutte le rette di α passanti per *P*; dunque per un punto passano più rette parallele a un piano. In conclusione possiamo affermare che:

TEOREMA 1 **Se due piani sono paralleli, ogni retta dell'uno è parallela all'altro.**