

## LAVORO DI MATEMATICA

Un vettore nello spazio  $\mathbb{R}^3$  si rappresenta mediante una terna di numeri reali, le componenti del vettore lungo le tre direzioni principali:  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Nella rappresentazione del vettore si può anche fare ricorso ai versori degli assi, vettori unitari (di intensità 1) paralleli ciascuno ad uno degli assi cartesiani. Quindi si può scrivere  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ . Salvo indicazioni diverse, un vettore si pensa applicato nell'origine del riferimento cartesiano.

Il modulo, o intensità, di un vettore si trova applicando alle componenti il teorema di Pitagora, quindi:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Se  $A$  e  $B$  sono due punti del piano cartesiano, il vettore  $AB$  ha per componenti le differenze delle coordinate dei due punti:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

## ESERCIZI

1. Trova la distanza fra i punti  $P = (3, -2, -4)$  e  $Q = (-2, 0, 1)$ .
2. I vertici di una piramide  $ABCDE$  sono  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (0, 4, 0)$ ,  $C = (4, 4, 0)$ ,  $D = (4, 0, 0)$ ,  $V = (2, 2, 4)$ .
  - (a) calcola le lunghezze degli spigoli della piramide;
  - (b) calcola la lunghezza dell'apotema della piramide (l'apotema è il segmento che congiunge  $V$  con il punto medio di ogni lato del quadrato di base);
  - (c) calcola la misura del diedro formato dalla base e da una faccia laterale della piramide.
3. I vettori  $\vec{a} = (-5, 2, 1)$  e  $\vec{b} = (-2, 3, 7)$  sono applicati nell'origine. Ha senso parlare di un piano a cui appartengono i due vettori? In caso affermativo il vettore somma  $\vec{a} + \vec{b}$  e il vettore differenza  $\vec{a} - \vec{b}$  dovrebbero appartenere a questo piano?

Su un insieme di vettori possiamo definire l'operazione di somma, ma anche un'operazione di prodotto (anzi: più tipi di prodotto, come vedremo). Il prodotto più semplice ed intuitivo è il prodotto per uno scalare. Per semplicità pensiamo ad uno scalare come un numero reale. Moltiplicare un vettore  $\vec{v}$  per uno scalare  $h$  significa generare un vettore  $\vec{u}$  le cui componenti sono le componenti di  $\vec{v}$  moltiplicate per  $h$ . Un tale vettore manterrà la direzione, ma modificherà l'intensità (nel caso che  $h$  sia diverso da 1 o da  $-1$ ) o il verso (nel caso che  $h$  sia negativo).

Come nel piano una retta era caratterizzata dal fatto che, presi due qualsiasi suoi punti, la pendenza (il famoso rapporto alzata - pedata) rimaneva costante, così nello spazio una retta può essere caratterizzata dal fatto che la direzione del vettore che congiunge una qualsiasi coppia di suoi punti rimanga costante.

Consideriamo anzitutto una retta  $r$  passante per l'origine  $O$  del riferimento, la cui direzione sia determinata dal vettore  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Un generico punto  $P = (x, y, z)$  appartiene alla retta se  $\overrightarrow{OP} = h\vec{v}$  e quindi se:

$$\begin{cases} x - 0 = hv_x \\ y - 0 = hv_y \\ z - 0 = hv_z \end{cases}$$

Se invece imponiamo che la retta avente  $\vec{v}$  come vettore direttore (vettore che dà la direzione) non passi per l'origine, ma per un punto  $A = (x_A, y_A, z_A)$ , allora, posto  $P = (x, y, z)$  il generico punto della retta, si dovrà avere:

$$\begin{cases} x - x_A = hv_x \\ y - y_A = hv_y \\ z - z_A = hv_z \end{cases}$$

da cui si ricavano le equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = hv_x + x_A \\ y = hv_y + y_A \\ z = hv_z + z_A \end{cases}$$

Nel caso che la retta debba passare per i due punti  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  il vettore direttore sarà  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ .

#### ESERCIZI

1. I vettori  $\vec{a} = (4, 2, -6)$  e  $\vec{b} = (-2, 1, 3)$  sono paralleli?
2. Scrivi un'equazione parametrica della retta passante per  $A = (-3, 4, 1)$  e  $B = (1, 2, 5)$ .
3. Stabilisci se le seguenti rette sono incidenti o no; nel caso che lo siano, trova il punto di intersezione, nel caso che non lo siano, stabilisci se sono incidenti o sghembe:

$$r : \begin{cases} x = 3h + 9 \\ y = -h - 3 \\ z = 4h + 6 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = k - 2 \\ z = k - 3 \end{cases}$$