CAPITOLO 4

I NUMERI COMPLESSI

OBIETTIVI

- Riconoscere nelle espressioni del tipo $a + ib$ i numeri complessi e saper operare con essi
- Rappresentare i numeri complessi nel piano
- Riconoscere e saper individuare il modulo, l'opposto, il reciproco, il coniugato di un numero complesso
- Interpretare geometricamente le operazioni fra i numeri complessi
- Risolvere particolari equazioni in C
- Interpretare geometricmente alcune applicazioni da C in C
- Studiare le radici ennesime dell'unità
- Rappresentare trigonometricamente un numero complesso e utilizzare la funzione di rotazione $rot(x + y) = rot(x)rot(y)$
- Normalizzare equazioni lineari in seno e coseno

In un calcolo, così, tu incominci con numeri solidi... o almeno numeri reali. Alla fine del calcolo i risultati sono anch'essi reali. Ma questi due gruppi di numeri reali sono collegati da qualcosa che semplicemente non esiste. Non ti fa pensare a un ponte di cui ci sono solo i pilastri a un capo e all'altro, e che uno attraversa tranquillamente come se ci fosse tutto intero?

da *I turbamenti del giovane Torless* di R. Musil

4.1 Una prima presentazione

Abbiamo visto, nel capitolo precedente, che polinomi privi di radici in un insieme possono ammetterle in uno più ampio: è il caso di $x^2 - 2$ che non ammette radici in $\mathbb{Q}$ ma ne ammette in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e, a maggior ragione in $\mathbb{R}$.
Ragionando in termini di equazioni si può dire che $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ mentre ne ha in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Consideriamo ora l'equazione $x^2 + 1 = 0$, cioè $x^2 = -1$. Essa non ha soluzioni in $\mathbb{R}$ perché i quadrati dei numeri reali sono numeri non negativi. Se ne può dare anche una interpretazione geometrica: la parabola $y = x^2 + 1$ non taglia l'asse x avendo il vertice in $(0, 1)$ ed essendo rivolta verso l'alto.
Tuttavia i matematici si sono domandati da tempo, fin dalla metà del '500, se non fosse possibile dare un significato alla scrittura $x^2 = -1$, passando così dalla retta reale a un insieme più ampio in cui potessero esistere anche le radici quadrate di numeri negativi.

NOTA Occorre precisare che, storicamente, l'introduzione dei numeri complessi non avvenne per l'esigenza di trovare a ogni costo la radice quadrata di -1, ma avvenne per uno strano imbroglio provocato dalla formula risolutiva dell'equazione di terzo grado. Per questa e altre vicende storiche rinviamo all'opera "Storia della Matematica" di Carl B. Boyer – Oscar Mondadori.

Spesso i matematici hanno tentato non solo di risolvere i problemi tecnici ma di cercare dei ponti nella teoria, anche là dove le prospettive potevano scoraggiare la ricerca, superando le barriere che le conoscenze già consolidate o il buon senso dettato dalla realtà fisica avevano costruito. Un esempio di tali barriere è proprio quello da cui siamo partiti, cioè l'impossibilità di trovare le radici quadrate di numeri negativi.

Ma l'esistenza degli enti matematici non deve necessariamente avere riscontro nella realtà esterna: il matematico può lasciare libera la sua fantasia e portare a termine le sue costruzioni. L'unico ostacolo che può trovare, tale da far crollare tutta la costruzione, è accorgersi di una contraddizione cioè dell'affermazione simultanea di una proposizione e della sua negazione.

Il bello è che spesso anche le ipotesi più azzardate e le costruzioni più fantasiose, laddove ci sia coerenza, si sono rivelate preziose per la rappresentazione di realtà fisiche esistenti, anche se non quotidiane, come nel caso delle geometrie non euclidee che potrete studiare nel prosieguo del corso di studi.

In questo paragrafo vogliamo seguire questo atteggiamento fantasioso di costruzione di un ente matematico che finora non è esistito. Ammettiamo che esista la radice dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ e affianchiamo ai numeri reali un nuovo ente, un simbolo, che indicheremo con 'i' tale che $i^2 = -1$.

Naturalmente vogliamo che il nuovo ente si possa sommare e moltiplicare con i 'vecchi' numeri reali, e con se stesso in modo che le proprietà formali continuino a valere.

In altre parole si dovranno poter costruire espressioni contenenti il *simbolo i, così come abbiamo imparato a costruire polinomi a partire dalle espressioni atomiche costituite da numeri e lettere.*

Espressioni come $2 + i$, $1 + 2i - i^3$, $i + i^4$, $\sqrt{2} + i$ saranno da ora in poi pienamente legittime: esattamente come erano legittimi i polinomi come somme fra espressioni atomiche.

Ma ora c'è una grossa novità: la relazione $i^2 = -1$ ci permette di ricavare tutte le potenze di i.

Infatti

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^3 i = -i \cdot i = -i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$

....

- $i^n = i^{n \bmod 4}$.

Le potenze di i si ripetono con periodo 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	....
i^n	i	−1	−*i*	1	i	−1	−*i*	1	....

La conseguenza più importante di questa scoperta è che i polinomi in i possono essere scritti sempre come polinomi di grado non superiore al primo nella forma $x + iy$ dove x e y sono numeri reali.

Ad esempio

- $1 + 2i - i^3 + 3i^4 - 4i^5 = 1 + 2i - (-i) + 3 - 4i = 1 + 2i + i + 3 - 4i = 4 - i$
- $1 + i^4 = 1 + 1 = 2 + 0i$.

Se le potenze di i si riducono comunque a uno dei quattro possibili numeri 1, i, -1, $-i$ possiamo provare a costruire la tavola di moltiplicazione rispetto al prodotto.

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Questa tavola ha la stessa struttura di altre che abbiamo già trovato in precedenza: le classi di resto modulo 4 rispetto alla somma, oppure le rotazioni che mandano un quadrato in sé. Pertanto la struttura algebrica dell'insieme 1, i, -1, $-i$ rispetto al prodotto è quella di gruppo abeliano. In particolare l'unità, 1, compare in ogni riga e in ogni colonna: questo vuol dire, fra l'altro, che esiste il reciproco di i, che è $-i$.

Le espressioni del tipo $x + iy$, dove x e y sono numeri reali, vengono dette ***numeri complessi***; x e y vengono detti rispettivamente parte ***reale*** e coefficiente della parte ***immaginaria*** del numero complesso. Il numero i viene detta ***unità immaginaria***. Naturalmente ci corre l'obbligo di definire le operazioni per i nuovi numeri in modo che continuino a valere le consuete proprietà.

I numeri complessi e le operazioni algebriche

Il numero complesso nullo si ha se e solo se sia x che y sono nulli; $x + iy = 0$ implica $x = 0$ e $y = 0$. Infatti, supponiamo che sia $y \neq 0$, allora si avrebbe $i = -x/y$ e quindi i sarebbe un numero reale, cosa che sappiamo non poter essere. Quindi deve essere $y = 0$ e di conseguenza $x = 0$.

Si può allora dire che *due numeri complessi sono uguali* se essi hanno uguale la parte reale e la parte immaginaria: infatti sia

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

allora

$$(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0;$$

si deduce che

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2.$$

Vediamo ora come si comportano i numeri complessi dal punto di vista della struttura algebrica, in altri termini come definiamo l'addizione e la moltiplicazione e quali proprietà valgono rispetto a queste operazioni.

a **Addizione di numeri complessi**

Siano $x+iy$ e $u+iv$ due numeri complessi; viene spontaneo definire la somma operando fra loro con le usuali proprietà che valgono per i polinomi:

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+i(y+v)$$

ovvero si sommano le parti reali fra loro e le parti immaginarie fra loro.

Le proprietà che valgono per i numeri reali ci garantiscono la validità delle proprietà associativa e commutativa anche per i complessi ossia la **1** e la **2** del § 2.1

3 abbiamo appena visto che l'elemento neutro è $0+i0$

4 *l'opposto di* $x+iy$ è quel numero $u+iv$ che sommato a $x+iy$ dà l'elemento neutro: questo vuol dire che $x+u=0$ e $y+v=0$ ovvero $u=-x$ e $v=-y$.

Rispetto all'addizione l'insieme dei complessi è un gruppo abeliano.

b Procediamo analogamente per definire *la moltiplicazione fra numeri complessi*. Applichiamo la proprietà distributiva del calcolo dei polinomi e ricordiamo che $i^2=-1$, per definire il prodotto tra numeri complessi:

$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(xv+yu).$$

Anche qui, come si può verificare puntualmente, le proprietà dei reali ci garantiscono la proprietà associativa e commutativa ossia la **5** e la **6** del § 2.1.

7 *L'elemento neutro è* $1+i0$ (anche in questo caso la verifica è immediata).

Trattandosi di polinomi tutte le proprietà dei polinomi sono valide anche per i numeri complessi.

L'unica proprietà che non possiamo dedurre dal calcolo dei polinomi è l'esistenza del reciproco.

Sia $x+iy$ un numero complesso diverso da zero e cerchiamo di determinare un numero $u+iv$ tale che sia:

$$(x+iy)(u+iv)=1+0i \quad \text{ovvero} \quad (ux-vy)+i(uy+vx)=1+i0.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} ux-vy=1 \\ vx+uy=0. \end{cases}$$

Questo sistema lineare in u, v ha un'unica soluzione perché il determinante del sistema è x^2+y^2 che è sicuramente diverso da zero perché abbiamo supposto che almeno una delle due componenti fosse diversa da zero. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

8 Il reciproco di $x+iy$, diverso da 0, esiste ed è $\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

A questo risultato si poteva arrivare anche in quest'altro modo: dopo averne ammesso l'esistenza, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $x-iy$

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\,\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

basta ora verificare che effettivamente il risultato della moltiplicazione di questo numero moltiplicato per $x + iy$ è 1.

9 È immediato verificare che vale anche la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

A questo punto l'insieme dei numeri complessi, che indicheremo con $\mathbb{C}$, ha acquisito la struttura algebrica di campo.
Abbiamo ottenuto un'estensione molto significativa da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ conservando tutte le proprietà algebriche. Tuttavia, nel passare da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ qualcosa si è persa: la struttura di ordine con le sue proprietà relative alla somma e al prodotto. In altre parole: se noi volessimo aggiungere alle proprietà già formulate gli assiomi dell'ordinamento totale cadremmo in una contraddizione. Infatti, supponiamo $i > 0$; allora moltiplicando ambo i membri per i, che abbiamo supposto maggiore di zero, si dovrebbe ottenere $i^2 > 0$, ma $i^2 = -1 < 0$. Assumendo invece $i < 0$ e moltiplicando entrambi i membri per i, questa volta minore di zero, dobbiamo cambiare il verso della disuguaglianza, quindi si ottiene di nuovo $i^2 > 0$ che è falso.

4.2 La rappresentazione dei numeri complessi nel piano

La mancanza di una struttura di ordine mette in crisi la possibilità di allineare i numeri complessi su una retta; tuttavia è naturale cercare una rappresentazione su cui appoggiare la nostra intuizione.
Un numero complesso dipende da una coppia di numeri reali, come ci dice la scrittura $x + iy$; viene spontaneo quindi rappresentare questi numeri come punti di un piano riferito a un sistema di assi cartesiani.
Precisamente il numero complesso $z = x + iy$ si rappresenta mediante il punto $P \Leftrightarrow (x, y)$ dove l'asse x viene detto asse reale e l'asse y asse immaginario

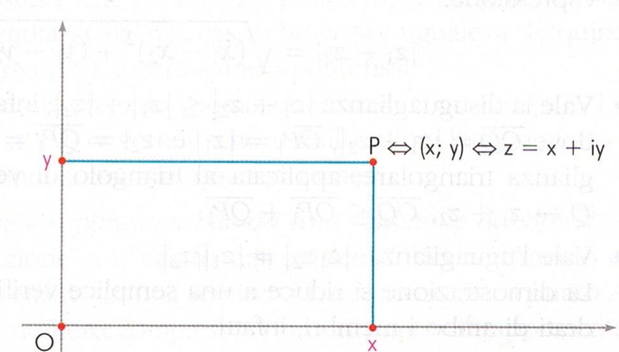

Fig. 1

Vediamo come vengono tradotte graficamente le operazioni.

a Cominciamo con la addizione.
Siano $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$; si ha $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

In altre parole la somma di due numeri complessi si esegue allo stesso modo in cui si sommano i vettori del piano; i numeri complessi z_1 e z_2 vengono interpretati geometricamente come vettori, che si sommano secondo la ben nota regola

del parallelogramma. Di conseguenza possiamo dare un significato geometrico all'applicazione $z \to z + w$, dove w è un numero complesso fissato.
Questa non è altro che una traslazione di vettore w, le cui componenti sono la parte reale e la parte immaginaria di w.

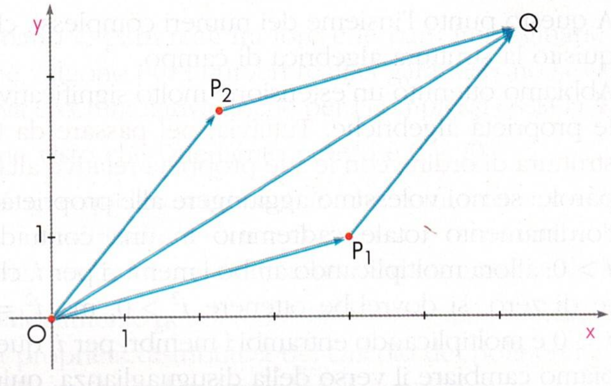

Fig. 2

- Prima di parlare della rappresentazione del prodotto di due numeri complessi dobbiamo introdurre la nozione di ***modulo di un numero complesso***.
Il collegamento fra numeri complessi e vettori rende del tutto intuitiva la definizione di modulo di un numero complesso $z = x + iy$: *si dice modulo di z il numero reale non negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si indica con $|z|$.*
Il modulo di z quindi non è altro che il modulo del vettore corrispondente a z cioè la distanza del punto $P \leftrightarrow (x, y)$ dall'origine.
- È interessante l'espressione della *distanza fra due punti* del piano ottenuta per mezzo del modulo: siano $P_1 \leftrightarrow z_1 = x_1 + iy_1$ e $P_2 \leftrightarrow z_2 = x_2 + iy_2$ due punti del piano. Osserviamo che $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ non è altro che la differenza dei due vettori, e nel piano è rappresentata dalla seconda diagonale del parallelogrammo; il suo modulo è rappresentato dalla seguente espressione:
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(P_1P_2).$$
- Vale la disuguaglianza $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; infatti in riferimento alla figura 2 dove $\overline{OQ} = |z_1 + z_2|$, $\overline{OP_1} = |z_1|$ e $|z_2| = \overline{QP_1} = \overline{OP_2}$ si ottiene dalla disuguaglianza triangolare, applicata al triangolo di vertici $O \leftrightarrow (0; 0)$, $P_1 \leftrightarrow z_1$ e $Q \leftrightarrow z_1 + z_2$, $\overline{OQ} \leq \overline{OP_1} + \overline{QP_1}$.
- Vale l'uguaglianza: $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.
La dimostrazione si riduce a una semplice verifica dell'uguaglianza dei quadrati di ambo i membri, infatti:
$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
perciò
$$|z_1z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 =$$
$$= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 + y_1^2) = |z_1|^2|z_2|^2.$$
Se i quadrati dei due membri positivi sono uguali, lo sono anche le loro radici quadrate; vale quindi la relazione: $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

In particolare il prodotto di due numeri complessi di modulo 1 è un numero complesso di modulo 1.
Osserviamo che se k è un numero reale non negativo si ha: $|kz_1| = k|z_1|$.

b Siamo ora in grado di tradurre geometricamente la moltiplicazione di due numeri complessi.
Cominciamo con il caso di numeri complessi di modulo 1 o, come diremo, *numeri complessi unitari.*
L'insieme di questi numeri è rappresentato nel piano dai punti della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.
Fissato un numero complesso unitario u, consideriamo l'applicazione del piano in sé così definita:

$$z \to uz.$$

Vale il seguente:

TEOREMA **L'applicazione $z \to uz$ è una rotazione con centro nell'origine. Viceversa, ogni rotazione col centro nell'origine si può rappresentare con un'applicazione $z \to uz$ dove u è un numero complesso unitario.**

Occorre dimostrare due implicazioni, una inversa dell'altra.

I *Ogni applicazione $z \to uz$ è una rotazione*
Ricordiamo che una rotazione è un'isometria che ha un solo punto fisso.
Anzitutto vediamo che è un'isometria, cioè che conserva le distanze.
Siano $P_1 \leftrightarrow z_1$, $P_2 \leftrightarrow z_2$ due punti qualunque del piano complesso.
Siano P_1' e P_2' i loro trasformati, dunque sarà $P_1' \leftrightarrow uz_1$ e $P_2' \leftrightarrow uz_2$.
Noi sappiamo scrivere la distanza fra due punti

$$\overline{P_1'P_2'} = |uz_2 - uz_1| = |u(z_2 - z_1)| = |u||z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = \overline{P_1P_2}.$$

Dunque si tratta di un'isometria.
Resta da dimostrare che ha un solo punto fisso, l'origine, a meno che non sia l'identità. L'identità si ha nel caso che u sia uguale a 1, quindi supponiamo che u sia diverso da 1 e cerchiamo i punti fissi.
Questi si trovano risolvendo l'equazione: $uz = z$ ovvero $(u - 1)z = 0$ che, con $u \neq 1$, implica $z = 0$ ovvero il vettore nullo; allora l'unico punto fisso è l'origine degli assi e quindi si tratta di una rotazione.

II *Ogni rotazione è rappresentabile da una relazione del tipo $z \to uz$*
Sia ρ una rotazione con centro nell'origine O del riferimento cartesiano; essa manda la semiretta x^+ in una semiretta t, perciò manda il punto $A \leftrightarrow (1, 0)$, rappresentato dal numero complesso 1, in un punto A' rappresentato dal numero complesso u.
Consideriamo allora l'applicazione che, nella nostra rappresentazione dei numeri complessi, si esprime così:

$$z \to uz.$$

Ma anche la ρ è una rotazione che manda la semiretta x^+ nella semiretta t e quindi, visto che è unica la rotazione che manda la semiretta x^+ nella semiretta t, queste due applicazioni coincidono e pertanto la rotazione ρ può essere espressa dalla relazione $z \to uz$.