ESERCIZI

Paragrafo 4.1

ESERCIZIO SVOLTO

1 Trasformare nella forma $x + iy$ il seguente numero complesso $(1+i)^3$.

Ricordandosi lo sviluppo del cubo del binomio e la relazione $i^2 = -1$ si ha:

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

2 Calcolare:

a $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

b $[(i+1)^2 - 2i] \cdot (1+i) \cdot (1-i) + 1$

c $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7$

3 Esprimere nella forma $x + iy$ i seguenti numeri complessi:

a $\frac{1}{1-i}$ **b** $\frac{1+i}{1-i}$ **c** $\frac{1}{i^5}$ **d** $(2-2i)^3$ **e** $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$

Ricordarsi che una frazione è il prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore e che noi conosciamo la forma del reciproco di un numero complesso.

4 Calcolare:

a $\frac{1}{2i}(i^7 - i^{-7})$ **b** $\frac{1}{\frac{1}{1+i}} + \frac{1}{\frac{1}{i-1}}$ **c** $\frac{3i-1}{2+1}$ **d** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

5 Osservando il risultato dell'esercizio svolto calcolare

$$(1+i)^{11}.$$

6 Calcolare le prime otto potenze di $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ usando le proprietà delle potenze.

7 Calcolare le prime otto potenze di $(1-i)$.
Dire per quali valori dell'esponente tali potenze sono numeri reali, immaginari, complessi.

ESERCIZIO SVOLTO

8 Trovare i numeri complessi z tali che $z^2 = i$.

Occorre porre $z = x + iy$, quindi $(x + iy)^2 = i$. Questa uguaglianza si traduce, separando la parte reale da quella immaginaria in $x^2 - y^2 + 2ixy = 0 + 1i$ (anche il numero complesso i ha una parte reale che è 0 e una parte immaginaria che è 1). Da questa si deducono due uguaglianze

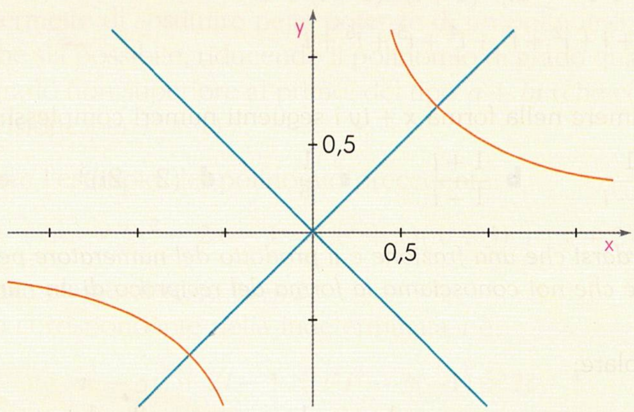
$$x^2 - y^2 = 0$$
$$2xy = 1.$$

Questo sistema ha una facile interpretazione analitica: si tratta di due rette $x - y = 0$ e $x + y = 0$ e dell'iperbole equilatera $xy = \frac{1}{2}$

Le soluzioni di questo sistema sono pertanto i punti $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $P'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e i relativi numeri complessi z sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Più avanti troveremo un metodo più veloce ed elegante ma per ora questa è la maniera di procedere.



9 Per ciascuno dei seguenti numeri complessi scrivere l'opposto e il reciproco:

a $1 + i$

b $1 + 2i$

c $3i$

d $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e $\frac{1}{1 - i}$

f $\frac{1 + i}{3 + 2i}$

10 Calcolare e scrivere nella forma $x + iy$ i seguenti numeri complessi:

a i^{78}

b $(3 - 7i)(2 + 5i)$

c $(-12 + 3i) + (7 - 5i)$

d $4(1 + i^7)$

e $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$

f $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2}$

g $\dfrac{2 - i\sqrt{7}}{2 + i\sqrt{7}}$

11 Dire quali delle seguenti espressioni rappresentano numeri reali, immaginari, complessi:

a $(\sqrt{3} - i\sqrt{5})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})$

b $(2 + i) - (3 - i) + (1 + 3i)$

c $(2 + 3i)(3 + 2i)$

d $-2i(2 + i)$

e $(-2 + 7i)(-2 - 7i)$

f $(2 - 3i) - (-1 - i) - (4 + 3i)$

12 Calcolare $\sqrt{5 + 12i}$.

(Supporre $\sqrt{5 + 12i} = z = x + iy$, allora $z^2 = 5 + 12i$ quindi.......)

13 Trovare tutte le radici delle seguenti equazioni:

a $z^4 - 16 = 0$

b $2z^2 - 2z + 5 = 0$

c $1 + z + z^2 = 0$

d $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

e $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$

f $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

g $3z^2 - 7z + 10 = 0$

h $(1 + i)z^2 - 4z + 4 = 0$

i $z^2 - 2iz - 10 = 0$

j $z^2 + 6z + 25 = 0$

14 Dire per quali valori di a le radici della seguente equazione sono reali o complesse:

$$z^2 - az + 1 = 0.$$

15 Calcolare la radice quadrata di -1 e di $-i$.

16 Risolvere l'equazione $z^3 - 125 = 0$.

17 Dire per quali valori di k le soluzioni del sistema formato dal cerchio di centro (0, 0) e raggio 3 e dalla retta $y = x + k$ sono complesse o reali.

18 Calcolare $(1+i)^8$, $(1-i)^8$.

19 Calcolare $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \ldots\ldots + 99i^{99} + 100i^{100}$.

Paragrafo 4.2

20 Rappresentare nel piano i seguenti numeri complessi:

a $1 - i$

b 4

c $-\dfrac{2}{3}i$

d $-2 + i$

e $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

f $i(1+i)$

21 Scrivere i coniugati dei numeri complessi dell'esercizio precedente.

22 Il numero complesso $z = 3i$ è soluzione di un'equazione di secondo grado; trovare l'altra soluzione e scrivi l'equazione.

23 Rappresentare nel piano il numero complesso z e $-z^*$; che isometria si ottiene?

24 Che numero si ottiene sommando un numero complesso e il suo coniugato? Risolvere il problema sia algebricamente che geometricamente.

25 Rappresentare nel piano le prime otto potenze di $(1+i)$ e di $(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})$; che differenze si notano? Quanti valori reali e immaginari si ottengono? Che differenza c'è nel modulo?

26 Come si rappresenta nel piano complesso la simmetria centrale rispetto all'origine?

27 Rappresenta le successive potenze di $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

28 Dire cosa diventa il triangolo di vertici O, $1 - i$, $1 + i$ quando si compie la trasformazione $z \to (2 + 2i)z$. Fare il disegno; dire da quali trasformazioni elementari essa è composta.

29 Studiare l'insieme dei punti z tali che $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$ dove k è un numero positivo fissato.

30 Studiare l'insieme dei punti z tali che $zz^* = 9$.

31 Ricordandosi che $|z|^2 = zz^*$ risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 - |z|^2 = 0$.

32 Dire quali sono i numeri z che verificano l'equazione $z^2 + |z|^2 = 0$.

33 Calcolare il modulo di $\frac{z^*}{z}$.

34 Tenendo presente l'esercizio precedente risolvere l'equazione $z^2 = \frac{z^*}{z}$.

35 Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(|z|^2 - z)(1 - z^*) = 0$.

36 Dire quale è l'insieme dei punti z tali che $Re(z^2) = 0$.

37 Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $Re(z^3 z^* - z^2) = 0$ (ricordarsi che $|z|^2 = zz^*$).

38 Determinare il luogo dei punti tali che $|z - (2 + i)| = 3$.

39 Considerare l'applicazione f: $z \to z^2$ dire:

a se esistono punti fissi

b quale è l'immagine dei numeri $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| = 1$

c trovare l'immagine $f(z)$ di $z = x + i$ e di $z = x + 2i$.

40 Tenendo presente che $|z|^2 = zz^*$, dimostrare in altra forma l'identità:

$$|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2.$$

41 Dimostrare che l'applicazione $z' = uz^*$, con u numero complesso unitario, rappresenta una simmetria assiale con asse passante per l'origine.

ESERCIZIO SVOLTO

42 Dati i numeri complessi $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 - 3i$ trovare i numeri complessi che appartengono all'asse di simmetria che scambia le rette a cui appartengono i due numeri.

Chiamiamo $z = x + iy$ il numero complesso generico; l'asse di simmetria è costituita da tutti i punti che hanno da z_1 e z_2 la stessa distanza: ma la distanza fra due numeri complessi è data dalla differenza $|z - z_1|$ e $|z - z_2|$; allora basta uguagliare i moduli di queste due differenze $|z - z_1| = |z - z_2|$ che con $z = x + iy$, $az_1 = 3 + 4i$, $az_2 = 4 - 3i$ diventa:

$$|(x - 3) + i(y - 4)| = |(x - 4) + i(y - 3)|;$$

29 Studiare l'insieme dei punti z tali che $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = k$ dove k è un numero positivo fissato.

30 Studiare l'insieme dei punti z tali che $zz^* = 9$.

31 Ricordandosi che $|z|^2 = zz^*$ risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 - |z|^2 = 0$.

32 Dire quali sono i numeri z che verificano l'equazione $z^2 + |z|^2 = 0$.

33 Calcolare il modulo di $\frac{z^*}{z}$.

34 Tenendo presente l'esercizio precedente risolvere l'equazione $z^2 = \frac{z^*}{z}$.

35 Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(|z|^2 - z)(1 - z^*) = 0$.

36 Dire quale è l'insieme dei punti z tali che $Re(z^2) = 0$.

37 Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $Re(z^3z^* - z^2) = 0$ (ricordarsi che $|z|^2 = zz^*$).

38 Determinare il luogo dei punti tali che $|z - (2 + i)| = 3$.

39 Considerare l'applicazione f: $z \to z^2$ dire:

a se esistono punti fissi

b quale è l'immagine dei numeri $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| = 1$

c trovare l'immagine $f(z)$ di $z = x + i$ e di $z = x + 2i$.

40 Tenendo presente che $|z|^2 = zz^*$, dimostrare in altra forma l'identità:

$$|z_1|^2|z_2|^2 = |z_1z_2|^2.$$

41 Dimostrare che l'applicazione $z' = uz^*$, con u numero complesso unitario, rappresenta una simmetria assiale con asse passante per l'origine.

ESERCIZIO SVOLTO

42 Dati i numeri complessi $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 - 3i$ trovare i numeri complessi che appartengono all'asse di simmetria che scambia le rette a cui appartengono i due numeri.

Chiamiamo $z = x + iy$ il numero complesso generico; l'asse di simmetria è costituita da tutti i punti che hanno da z_1 e z_2 la stessa distanza: ma la distanza fra due numeri complessi è data dalla differenza $|z - z_1|$ e $|z - z_2|$; allora basta uguagliare i moduli di queste due differenze $|z - z_1| = |z - z_2|$ che con $z = x + iy$, $az_1 = 3 + 4i$, $az_2 = 4 - 3i$ diventa:

$$|(x - 3) + i(y - 4)| = |(x - 4) + i(y - 3)|;$$