poiché il modulo di $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}$ tale uguaglianza (al quadrato) diventa

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9$$

da cui, semplificando $2x - 14y = 0$ che è l'equazione dell'asse.

43 Determinare due numeri reali a e b che soddisfino l'equazione

$$a(3 - 4i) - b(2 + i) + 22 = 0.$$

44 Trovare le soluzioni del seguente sistema e interpretarle geometricamente

a $|z - (4 + 3i)| = |z - i|$

b $|z - 6i| = |z + 4i|$

45 Risolvere il seguente sistema e interpretarlo geometricamente

a $|z - (-1 + 2i)| = 2$

b $|z - (1 - i)| = 2$

46 Determinare i punti di $\mathbb{C}$ che verificano la relazione

$$2 \leq |z - (2 - i)| \leq 5.$$

47 Interpretare geometricamente le seguenti disuguaglianze:

$$|z| > 2, \qquad |z| < 1/2.$$

48 Interpretare le seguenti disequazioni:

a $Im\, z > 2$

b $Re\, z < -3$

c $|Im\, z| < 2$

49 Trovare la condizione a cui devono soddisfare a, b, c, d, affinché il numero complesso $\dfrac{a + ib}{c + id}$ sia:

a un numero reale

b un numero immaginario

c sia di modulo 1

50 Dimostrare che un numero complesso $w = u + iv$ diverso da 0 ha due radici quadrate, fra loro opposte. (Si tratta di risolvere l'equazione $z^2 = w$; porre $z = x + iy$ e scrivere il sistema che traduce questa equazione).

51 Dimostrare che ogni isometria del piano si esprime nella forma $z \rightarrow uz + w$ oppure $z \rightarrow uz^* + w$ dove u e w sono numeri complessi e $|u| = 1$.

52 Dimostrare che ogni similitudine del piano si rappresenta con un'applicazione del tipo $z \to uz + w$ oppure $z \to uz^* + w$ purché $u \neq 0$.

53 Sia $u = a + ib$ un numero complesso unitario e $w = c + id$ scrivere l'equazione della similitudine dell'esercizio precedente; analizzare il sistema che si ottiene uguagliando le parti reali e le parti immaginarie.

54 Dimostrare che una similitudine propria ha un unico punto fisso.

55 Descrivere l'insieme dei numeri complessi z per cui $|z| < |z + i|$.

56 Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^*(5z^2 - z^*z^3) = 4z \text{ (ricordarsi della relazione } |z|^2 = zz^*).$$

Paragrafo 4.3

57 Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

a $1 - i$

b $1 + i\sqrt{3}$

c $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}i$

d $-3i$

e $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

f -4

g $-\sqrt{3} + 3i$

58 Dimostrare che il numero complesso $\dfrac{a+ib}{a-ib}$ è unitario.

59 Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi:

a $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e le loro potenze.

60 Calcolare le radici quarte di i (equivale a dire trovare i numeri z tali che $z^4 = i$, e detto $z = rot(\alpha)$, questo implica....).

61 Calcolare le radici seste dell'unità e farne la somma. Cosa si ottiene?

62 Calcolare le radici quinte di $-i$.

63 Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:

a $2z^4 + z^3 - z - 2 = 0$

b $2iz + 2(z + i) = (1 - i)^2$

64 Determinare l'insieme dei punti del piano rappresentati da $z = i + t(1 + 2i)$ con t reale.

65 Rappresentare il luogo descritto da $\dfrac{Re\,z + Im\,z}{|z|} = 1$.

66 Risolvere il sistema e interpretarlo geometricamente $\begin{cases} z^8 = 1 \\ z = -iz^* \end{cases}$

67 Data la funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C} - \{1\}$ $f(z) = \dfrac{z + i\sqrt{3}}{z - 1}$ trovare:

a i punti fissi

b i trasformati che sono reali

c i trasformati che sono immaginari

68 $z^3 = 1$ rappresentano le radici terze dell'unità; $(z - 1)^3 = 1$ in cosa differisce dall'equazione precedente?

69 Alla luce dell'esercizio precedente risolvere e interpretare il sistema $\begin{cases} (z - 1)^3 = 1 \\ z^6 = 1 \end{cases}$

70 Dimostrare che il quoziente di due numeri complessi con lo stesso argomento è un numero reale.

71 Dimostrare che se p è pari la somma delle radici p-esime dell'unità è uguale a zero, ovvero $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots z^{p-1} = 0$. Darne una dimostrazione geometrica.
Dimostrare che comunque sia p la somma delle radici p-esime dell'unità è zero (ricordarsi che $1 - z^p$ è divisibile per $1 - z$).

72 Risolvere l'equazione $z^3 = i|z|^2$.

73 Dimostrare che le radici pi-esime dell'unità formano un gruppo ciclico di ordine p.

74 Dimostrare che se p è primo non esistono sottogruppi ciclici.

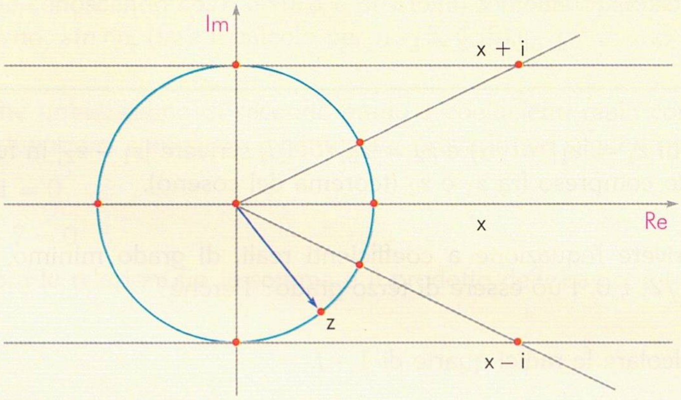
75 Date le radici dell'equazione $z^{12} = 1$ trovare i sottogruppi ciclici.

76 Quali fra le radici seste dell'unità sono anche radici terze?

77 Usando la forma trigonometrica dimostrare che $\dfrac{x - i}{x + i}$ (con $x \in \mathbb{R}$) ha modulo 1; dire qual è l'argomento.

ESERCIZIO SVOLTO

78 Dimostrare che l'applicazione (di Mobius) $f(x) = \dfrac{x-i}{x+i}$, da $\mathbb{R}$ in $\{\mathbb{C} : |z| = 1 \text{ con } z \neq 1\}$ è biunivoca.



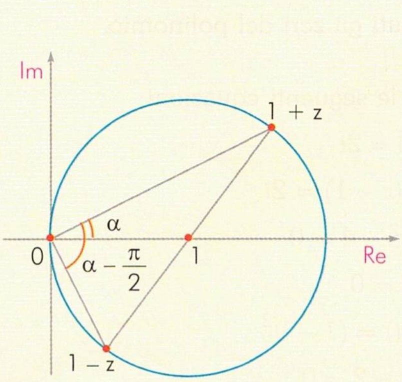
Avete già verificato nell'esercizio precedente che il numero $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ si può esprimere in forma trigonometrica come $z = rot(-2\alpha)$; infatti se $x + i = \sqrt{1+x^2}\, rot(\alpha)$ allora $x - i = \sqrt{1+x^2}\, rot(-\alpha)$ e quindi $\dfrac{x-i}{x+i} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}\, rot(-\alpha)}{\sqrt{1+x^2\, rot(\alpha)}} = rot(-2\alpha)$ dunque è unitario.

Vediamo se la corrispondenza è biunivoca:

I per ogni x esiste $\dfrac{x-i}{x+i}$ poiché sicuramente $x \neq -i$ dato che x è reale;

II verifichiamo che per ogni $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ esiste un x e che x è reale: infatti risolvendo l'equazione $z = \dfrac{x-i}{x+i}$ rispetto a x si ottiene $x = \dfrac{i(z+1)}{1-z}$ che per $z \neq 1$ è sempre definito.

Vediamo se x è reale: se $|z| = 1$, $z + 1$ e $1 - z$ sono due punti diametralmente opposti della circonferenza unitaria di centro $(1, 0)$, allora $z + 1 = h\, rot\, \alpha$ e $1 - z = k\, rot\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{2}\right)$, in conclusione $x = \dfrac{h}{k} rot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha - \alpha \mp \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{h}{k} rot\left(\dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{2}\right)$ è un numero reale.



Alcuni casi particolari:

- se x diventa molto grande α diventa molto piccolo e $rot(\alpha)$ si avvicina a 1.
- se $x = 1$ allora $z = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$
- se $x = 0$ allora $z = -1$
- se $x = -1$ allora $z = i$.

79 Detti $z_1 = |z_1|\, rot(\alpha)$ e $z_2 = |z_2|\, rot(\beta)$ scrivere $|z_1 - z_2|$ in funzione di z_1, z_2, e dell'angolo compreso fra z_1 e z_2 (teorema del coseno).

80 Scrivere l'equazione a coefficienti reali, di grado minimo, che ha fra le sue radici $-1/2$, i, 0. Può essere di terzo grado? Perché?

81 Calcolare le radici quarte di $1 - i$.

82 Dato in $\mathbb{C}$ $f(z) = z^3 + (5i-1)z^2 + (-1+4i)z + 3 + 7i$.
Calcolare $f(i)$ e $f(-1-i)$; scrivere $f(z)$ fattorizzato.

83 Calcolare $\sqrt{2-2i}$.

84 Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:

$$z^2 + 3iz + 4 = 0, \quad z^2 + 2z + 1 = 0, \quad z|z| - 2z - 1 = 0, \quad |z|^2 z^2 = i.$$

85 Risolvere $x^3 - 6x - 4 = 0$.

86 Determinare come devono essere z_1 e z_2 affinché valga la relazione $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$; darne una dimostrazione geometrica.

87 Detto $P(z) = z^2 - iz + (1-3i)$ calcolare:

a $P(1+2i)$

b $P(1+i)$

c $P(3-2i)$

Determinare tutti gli zeri del polinomio.

88 Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

a $(1-i)z + 3i = 2i$

b $i(z+1) + 2(z-1) = 2i$

c $z^4 + 2z^3 + z^2 - 4 = 0$

d $z^2 - 4iz - 8 = 0$

e $2iz + 2(z+i) = (1-i)^2$

f $2z^4 + z^3 - z - 2 = 0$

89 Determinare per quale valore reale di a il numero $z = \dfrac{1}{1-i} + \dfrac{(a-2i)^2}{1+i}$ è reale.

90 Utilizzando la funzione *rot* α calcolare il $cos\,(2\alpha)$, $sin\,(2\alpha)$, $cos\,(3\alpha)$, $sin\,(3\alpha)$.

91 Far vedere che conoscendo $cos\,\alpha$ e $sin\,\alpha$ è possibile, con sole operazioni razionali, determinare $cos\,n\alpha$, $sin\,n\alpha$, (fare il calcolo per $n = 3, 4, 5$).

92 Dimostrare che un'equazione di secondo grado a coefficienti reale con discriminante negativo, ha due radici complesse e coniugate; provarlo nei seguenti casi:

a $z^2 - 6z + 1 = 0$

b $5z^2 - 2z + 7 = 0$

Valgono ancora le relazioni fra la somma e il prodotto delle radici e i coefficienti?